CP

CYCLE 2

J'apprends les maths avec Tchou

Livre du maître

Sous la direction de

RÉMI BRISSIAUD

Maître de conférences à l'IUFM de Versailles

FLORENCE SUIRE
Professeur des écoles

FRANÇOIS LELIÈVRE
Professeur des écoles

ANDRÉ OUZOULIAS
Professeur à l'IUFM de Versailles

PIERRE CLERC
Instituteur

RETZ

www.editions-retz.com

9 bis, rue Abel Hovelacque

75013 Paris

Sommaire

Présentation : comment les enfants apprennent les mathématiques au CP

ISBN : 978-2-7256-2751-9

Rémi Brissiaud

Cette édition 2008 est la troisième de J'apprends les maths CP *et la deuxième de sa version Tchou (l'autre est la version Picbille).*

Rappelons que la spécificité de cette version réside dans l'enseignement dès le début de l'année d'une suite numérique régulière : dix, dix et un, dix et deux, dix et trois… dix et neuf, deux dix, deux dix et un, deux dix et deux… deux dix et neuf, trois dix, trois dix et un…

Chacune des précédentes éditions a apporté des innovations marquantes en pédagogie :

– la distinction entre comptage et calcul et l'usage de problèmes d'anticipation dès la première édition ;

– des problèmes d'anticipation d'un nouveau type dans la deuxième édition : ceux où l'élève simule mentalement un ajout ou un retrait que l'enseignant réalise de manière masquée.

La place de ces activités se trouve confortée dans cette nouvelle édition ; de plus, deux nouveautés sont introduites :

– l'étude des groupements par 2 et par 5 avant d'aborder le groupement par 10. Cette nouveauté, commune aux versions Tchou et Picbille, facilite l'enseignement de la numération décimale et prépare celui de la multiplication et de la division dans les classes ultérieures ;

– l'introduction du signe « – » dans une situation de comparaison. Cette autre nouveauté est spécifique à la version Tchou.

Ces innovations, ainsi que la prise en compte des nouveaux programmes pour l'école, ont conduit à une réécriture de la plupart des chapitres de cette présentation théorique.

Comment les enfants apprennent les mathématiques au CP

La mise au point d'un fichier tel que celui-ci implique tout un ensemble de choix pédagogiques.

- Autour de quels axes organiser la progression ?
- Dans quel ordre introduire les notions ?
- Comment favoriser la mémorisation des relations numériques ?
- Comment anticiper dès le CP l'acquisition de notions qui sont au programme du CE1 ?

D'une manière plus générale, pour répondre à ces différentes questions, il importe de se demander comment les enfants apprennent les mathématiques au CP et dans les classes suivantes.

Apprendre les mathématiques, c'est apprendre à résoudre des problèmes, acquérir des savoir-faire fondamentaux (comme le calcul) et réinvestir ces savoir-faire dans la résolution de problèmes.

Ces thèmes sont d'abord développés de manière générale dans le premier chapitre (voir sommaire ci-contre), avant de l'être pour chacune des notions clés du programme (addition, soustraction et numération) dans les quatre chapitres suivants. Le chapitre consacré à la soustraction est sensiblement différent de celui de la version Picbille. Le chapitre 4, lui, est spécifique à la version Tchou.

Le 6e chapitre est consacré à la géométrie et à la mesure.

Chapitre 1

RÉSOUDRE DES PROBLÈMES ET PROGRESSER EN ARITHMÉTIQUE

De façon générale, le fait qu'une connaissance apparaisse comme « une réponse à une question ou à un problème » aide à la compréhension et à l'appropriation de cette connaissance. C'est pourquoi les pédagogues s'accordent depuis longtemps à penser que la résolution de problèmes doit occuper une place importante dans les apprentissages mathématiques. De ce point de vue, les programmes officiels de 2008 s'inscrivent dans une certaine continuité.

On sait bien cependant que la résolution de problèmes est une activité difficile, où de nombreux enfants sont longtemps en échec. Comment les aider ? Quelles ambitions est-il raisonnable de nourrir au cours préparatoire ? Quels sont les principaux écueils à éviter ?

Plan du chapitre

Des problèmes faciles, et d'autres difficiles

Considérons les problèmes arithmétiques qui sont énoncés de manière classique, c'est-à-dire sous la forme verbale d'une petite histoire[1]. Toutes les recherches qui ont été menées montrent que les problèmes **faciles** sont ceux dont l'énoncé peut être **mimé facilement** : le plus souvent, ils mettent en scène des situations « dynamiques » (*ajout*, *retrait*, *réunion*[2]) et les données numériques sont introduites dans un ordre qui suit ces actions. Lorsqu'on met du matériel à la disposition des élèves, ces problèmes sont souvent réussis dès l'école maternelle, et, en tout cas, bien avant tout enseignement des opérations arithmétiques que sont l'addition et la soustraction. C'est le cas par exemple de ces deux problèmes d'addition :

Pierre a 5 billes ; il gagne 3 billes ; combien de billes a-t-il maintenant ? (il s'agit d'un problème où l'on cherche le « résultat d'un ajout »),
et
Pierre a 5 billes ; Paul a 3 billes ; combien ont-ils de billes ensemble ? (recherche du « résultat de la réunion de deux collections d'objets identiques »).

C'est le cas aussi de ce problème de soustraction :

Pierre a 8 billes ; il perd 3 billes ; combien de billes a-t-il maintenant ? (recherche du « résultat d'un retrait »).

En revanche, considérons un problème tel que celui-ci :

Pierre prend ses billes pour aller en récréation.
Pendant la récréation, il joue et il perd 5 billes.
En rentrant de récréation, Pierre a 3 billes.
Combien Pierre avait-il de billes avant la récréation ?

Un travail de recherche américain montre qu'un problème similaire n'est résolu que par 39 % d'enfants de fin de CP, alors qu'il s'agissait des mêmes très petits nombres et que ces élèves étaient assez performants puisque la réussite aux quatre problèmes faciles précédents était proche de 100 % ! (recherches rapportées dans Fayol 1990[3]).

Ce phénomène s'explique aisément. Dans le cas des 3 premiers problèmes, les enfants qui ne trouvent pas la réponse mentalement miment l'énoncé avec le matériel qu'on a mis à leur disposition. Pour le premier problème, par exemple, ils prennent 5 jetons (Pierre avait 5 billes), ils en ajoutent 3 (il gagne 3 billes) et ils comptent l'ensemble des jetons sortis. La réussite est déjà très importante dès la grande section de maternelle.

En revanche, le dernier problème commence par « *Pierre prend ses billes pour aller en récréation* ». Il est impossible de construire une collection correspondant

1. Nous verrons plus loin une autre façon d'énoncer les problèmes, sous la forme de situations d'anticipation
2. La recherche du résultat de la réunion de deux ensembles est facile lorsqu'il s'agit de collections d'objets identiques. S'il s'agit de filles et de garçons et que la question porte sur le nombre total d'enfants, cette situation familière reste bien comprise. En revanche, s'il s'agit de roses et de marguerites et que la question porte sur le nombre de fleurs, la difficulté s'accroît.
3. Fayol M., *L'enfant et le nombre*, Genève, Delachaux & Niestlé, 1990.

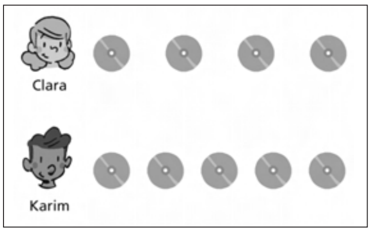
aux billes que possède Pierre à ce moment. Le « mime » de l'énoncé ne peut pas être amorcé. La « manipulation » est impossible.

La recherche du résultat d'un ajout, d'un retrait ou d'une réunion sont donc les seuls problèmes dont on peut considérer qu'ils sont très faciles. L'enseignant est-il pour autant condamné à poser seulement des problèmes de ce type ? Non, bien sûr. Le rôle de l'enseignant n'est pas seulement de constater ce que les enfants savent faire, mais bien de leur faire acquérir de nouvelles connaissances et accéder à de nouveaux savoir-faire. Pour rendre les problèmes précédents plus difficiles et, inversement, pour en rendre d'autres plus faciles, l'enseignant peut aménager sa façon de les énoncer : plutôt que de raconter une « histoire » tout en mettant du matériel à la disposition des élèves, il peut proposer les problèmes sous la forme de situations d'anticipation.

Différentes façons d'énoncer un problème

Créer à l'école des situations d'anticipation : un 1er exemple

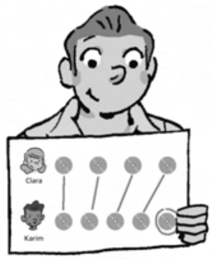
L'un des matériels pédagogiques utilisés avec ce fichier consiste en des cartons sur lesquels il est possible d'écrire au feutre effaçable et où figurent les têtes de deux enfants, Clara et Karim, ayant chacun un certain nombre de CD.



Il s'agit de chercher qui a le plus de CD et combien de plus (les élèves disposent d'un carton-réponse sur lequel ils entourent la tête de l'enfant qui a le plus de CD et ils écrivent la valeur de la différence). Lorsque les élèves ont la possibilité d'effectuer la correspondance terme à terme, ce problème est évidemment facile : il suffit de relier 1 à 1 les CD de Clara et de Karim (on relie « ce qui est pareil ») et d'entourer le ou les CD qui ne sont pas reliés (on obtient « la différence »).
Pour créer une situation pédagogique intéressante, il suffit que l'enseignant tienne le carton de sorte que les élèves n'en voient que le verso et qu'il leur décrive la situation.

Les problèmes de comparaison, lorsqu'ils sont énoncés de manière classique, sous forme d'une histoire, ne sont généralement pas des problèmes faciles. C'est seulement lorsque l'énoncé conduit spontanément à évoquer la correspondance terme à terme (lorsque le problème parle de bouteilles et de bouchons, par exemple) que les élèves pensent à l'effectuer.
Le problème des CD de Clara et Karim est donc en lui-même un problème difficile. Cependant, en le transformant en situation d'anticipation, l'enseignant amène les élèves à mettre en œuvre le geste mental de la correspondance terme à terme ; il rend possible l'accès à la solution.

De plus, la situation est telle que l'enseignant a la possibilité de valider les réponses des élèves autrement qu'en leur disant qu'ils ont réussi ou échoué : il suffit en effet qu'il retourne le carton et qu'il réalise la correspondance terme à terme, c'est-à-dire qu'il réalise l'action pour que les élèves sachent s'ils ont réussi ou non à en anticiper le résultat.



Créer à l'école des situations d'anticipation : un 2e exemple

Plusieurs pages du fichier de l'élève contiennent des activités analogues à celle-ci (haut de la page 70 folio élève), qui sont appelées « problèmes avec cache » :

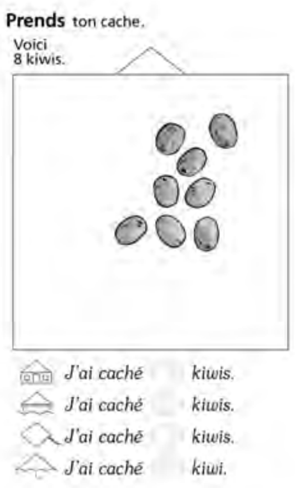


Fig. 1

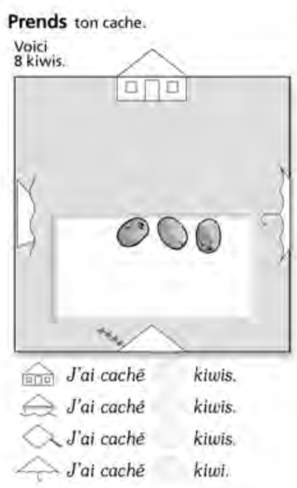


Fig. 2

L'élève vérifie d'abord qu'il y a bien 8 kiwis (fig. 1), puis il pose son cache de sorte que le triangle situé en haut du cadre figure le toit d'une maison (fig. 2). Quand le cache est ainsi posé, seuls 3 kiwis sont visibles et on interroge l'enfant sur le nombre de kiwis qu'il a cachés[4]. Pour connaître la quantité de kiwis masqués, il suffirait de soulever la partie correspondante du cache et de les compter. Mais dans un premier temps, l'enseignant empêche cette procédure. Celle-ci est réservée à l'autocorrection. Il s'agit d'**anticiper** le résultat de ce comptage en utilisant les informations disponibles : il y a 8 kiwis en tout, et on en voit 3 seulement !

Ce problème aurait pu être proposé à partir d'un énoncé classique :

Dans une cuisine, il y a 8 kiwis.
5 de ces kiwis sont dans une coupe à fruits.
Les autres kiwis sont dans le réfrigérateur.
Combien y a-t-il de kiwis dans le réfrigérateur ?

Avec la forme d'énoncé que nous avons adoptée dans le fichier, c'est l'enfant lui-même qui « crée » le problème en posant le cache, il n'est pas obligé d'imaginer une **situation hypothétique** où il y a 8 kiwis dans une cuisine, dont 5 dans une coupe à fruits. La représentation mentale de la quantité inconnue est facilitée du fait que le cache est la cause de la disparition de certains kiwis, mais le même cache rappelle aussi que les kiwis sont là, présents en dessous. Beaucoup de jeunes enfants qui ont du mal à reconstituer mentalement la situation décrite dans un énoncé verbal, à partir des seuls indices linguistiques de cet énoncé, réussissent mieux dans ces situations d'anticipation.

Enfin, la situation est autocorrective : en soulevant le cache, l'enfant peut vérifier ses anticipations. On remarquera qu'il s'agit d'une autocorrection « au sens fort », très différente de celle que permettent les fichiers comportant 2 sortes de fiches, les fiches-problèmes et les fiches-corrigés. En effet, dans le cas du problème avec cache, c'est en soulevant le cache que l'enfant sait si sa réponse est la bonne. Le verdict provient de la situation et non du jugement extérieur de son maître ou d'un maître anonyme qui aurait rédigé la fiche-corrigé.

En conclusion : il est parfaitement possible de proposer aux élèves d'autres problèmes que la recherche du résultat d'un ajout, d'une réunion ou celui d'un retrait (Pierre a 9 billes. Il en gagne/perd 3. Combien en a-t-il maintenant ?), mais ces problèmes difficiles doivent être proposés « en situation ». L'enfant est alors amené à anticiper le résultat d'une action (dans les problèmes précédents : effectuer une correspondance terme à terme, soulever le cache). L'enseignant a dans ce cas la possibilité d'aider les enfants en évoquant cette action (« Je relie dans ma tête ce qui est pareil » ; « Si tu soulèves le cache, qu'est-ce qu'il y a en dessous ? »). Enfin, la réalisation effective de cette action permet à l'enfant de vérifier son anticipation.

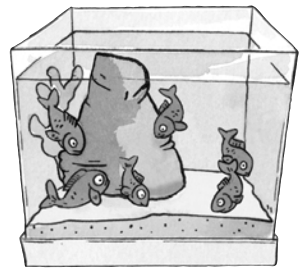
Globalement, ces situations-problèmes autocorrectives permettent donc de théâtraliser certaines caractéristiques essentielles de l'activité mathématique : faire des mathématiques, ce n'est pas se conformer à l'attente d'un enseignant, c'est réussir des anticipations portant sur des actions ou des mises en relation.

4. Lorsque l'élève a répondu, il continue l'activité en faisant tourner son cache. Chaque position du cache avec le triangle supérieur figure successivement un bateau, un cerf-volant, un parapluie et correspond à une nouvelle tâche.

Concevoir une progression dans la façon d'énoncer les problèmes

Nous n'avons, jusqu'ici, considéré que deux façons d'énoncer un problème, des types d'énoncés qu'on peut situer aux deux extrémités d'une échelle de difficulté : les situations-problèmes autocorrectives et les énoncés verbaux. Considérons maintenant ce problème, qui est proposé en fin d'année aux élèves dans le cadre d'une activité complémentaire décrite page 143 folio élève de ce *Livre du maître* (dans la section consacrée à l'accompagnement des différentes séquences) :

Dans son aquarium, Bruno a 9 poissons.
Combien de poissons y a-t-il derrière le rocher ?



Il y a .... poissons derrière le rocher.

On admettra aisément que ce problème est plus facile que le seul énoncé verbal : « Bruno sait qu'il a 9 poissons dans son aquarium. Il regarde l'aquarium et voit 6 poissons seulement parce que les autres sont cachés derrière un rocher. Combien de poissons sont cachés derrière le rocher ? ». De toute évidence, cette image de l'aquarium facilite la représentation du problème.

Mais ce dernier est plus difficile qu'une situation-problème autocorrective comme celle des kiwis. D'un certain point de vue, on pourrait considérer que cette image est proche de celles que l'enfant peut observer dans les « problèmes avec cache », comme celui des kiwis. On voit en effet des poissons, mais on ne voit pas tous les poissons, parce que certains sont cachés derrière le rocher. Mais dans le cas des kiwis, c'est l'enfant lui-même qui avait caché certains éléments, alors qu'ici l'enfant doit reconstituer mentalement cette situation en mettant en relation l'énoncé verbal (il y a 9 poissons) et ce que montre l'image (on ne voit que 6 poissons).

Le problème des kiwis permet un apprentissage de la résolution de problèmes qui ont la même structure, mais qui sont énoncés sous une forme plus verbale, comme le problème de l'aquarium.

En conclusion, la difficulté d'un problème résulte pour partie de la façon dont il est énoncé. Il s'agit là d'une variable importante, qu'il faut prendre en compte tout autant que la nature même du problème (*cf.* notre distinction entre « problèmes faciles » et « problèmes difficiles » du début de ce chapitre).

Les 3 dimensions du progrès en résolution de problèmes

La mentalisation des actions d'ajout, de retrait, de groupement...

Une première dimension du progrès réside dans le fait que pour résoudre un problème arithmétique, les élèves deviennent de moins en moins dépendants de l'utilisation de collections d'objets pour déterminer le résultat d'un ajout, d'un retrait, d'un groupement, d'une comparaison... Ils sont progressivement capables de donner la solution sans manipuler physiquement des collections parce qu'ils se contentent d'une « manipulation mentale » d'équivalents mentaux de ces objets.

Il est important de remarquer que cette phase de simulation mentale de ce que dit l'énoncé reste une composante incontournable du processus de résolution chez les élèves performants et même chez des adultes experts. En effet, on pourrait croire qu'à terme l'expert en arithmétique travaille d'emblée sur des symboles arithmétiques et qu'il n'a plus besoin de simuler mentalement la situation décrite dans l'énoncé. Or, ce n'est pas le cas. L'étude scientifique de la façon dont les élèves raisonnent en situation de résolution de problème[5] a montré que lorsque des élèves sont confrontés à un problème comme : *Pierre a 28 billes ; il gagne des billes et maintenant il a 31 billes. Combien de billes a-t-il gagnées ?* (recherche de la « valeur d'un ajout »), les plus performants d'entre eux, comme probablement les adultes, ne calculent pas la soustraction 31 – 28 : ils déterminent directement le résultat sous la forme 28 + 3 = 31.
En fait, il n'y a pas de résolution d'un problème arithmétique possible sans compréhension de son énoncé et l'on peut considérer que la simulation mentale de ce qui est dit dans l'énoncé correspond à cette phase de compréhension. La compétence à simuler ce qui est dit dans l'énoncé est donc cruciale ; elle est à la base du progrès et reste opérationnelle tout au long de la vie. Mais comment la favoriser en classe ?

Inciter les élèves à raisonner sur des points… comme si c'étaient des fleurs, des poissons, etc.
Qu'il s'agisse de trouver le résultat de l'ajout de nouvelles fleurs à un bouquet, du retrait de fleurs fanées, de chercher le nombre de fleurs dans 3 bouquets de 5 fleurs, par exemple (préparation de la multiplication), les élèves sont souvent incités dans *J'apprends les maths* à raisonner sur des collections de points (le plus souvent organisées à l'aide des repères 5 et 10) comme si c'étaient des fleurs. En effet, l'usage de ce type de représentations appelées « analogiques » en psychologie, favorise la généralisation : raisonner sur des points comme si c'étaient des fleurs aide à comprendre que le même raisonnement vaudrait tout autant si l'on imaginait que les points sont des poissons que l'on ajoute ou retire d'un aquarium, des arbres que l'on plante ou que l'on arrache, etc.

L'intérêt des situations où les élèves simulent mentalement une action que le maître effectue de manière masquée
On verra dans la suite de cette présentation qu'avec *J'apprends les maths*, les enseignants sont souvent conduits à animer des activités qui, comme la comparaison des CD de Clara et de Karim, amènent les élèves à simuler mentalement une action (la correspondance terme à terme dans ce cas) que l'enseignant décrit ou même exécute devant les élèves, mais de manière masquée (voir les pages 3 et 4 du fichier de l'élève). Certaines recherches en neuropsychologie[6] montrent en effet que lorsque quelqu'un réalise une action devant soi, cela conduit inéluctablement à simuler mentalement ce que cette personne est en train de faire. C'est pourquoi cette façon d'énoncer les problèmes est un moyen pédagogique particulièrement efficace lorsqu'on veut favoriser chez les élèves la mentalisation des actions d'ajout, de retrait, de groupement…

La symbolisation de ces actions et la construction de catégories de situations

Au-delà de savoir trouver le résultat d'un ajout ou d'un retrait, d'abord en simulant les actions correspondantes avec du matériel, puis en les simulant mentalement, l'enfant doit de plus apprendre que la première action peut être symbolisée à l'aide du signe « + » et la suivante à l'aide du signe « – ». Cependant, la difficulté pédagogique la plus importante est ailleurs : l'enfant doit apprendre que le signe « – » ne permet pas seulement de résoudre des problèmes où l'on cherche le résultat d'un retrait. En effet, il permet aussi de résoudre des problèmes de comparaison comme celui de Clara et Karim (« Qui a le plus de CD ? » et « Combien de plus ? ») *A priori*, les situations de retrait et celles de comparaison sont très différentes : les dernières mettent en jeu deux quantités qui ne varient pas dans le temps alors que les premières mettent en jeu une seule quantité qui décroît.

Ainsi la même opération arithmétique permet de traiter des situations qui n'ont que peu de propriétés communes, et c'est l'un des enjeux fondamentaux de la scolarisation que de permettre aux élèves, à terme, de regrouper au sein d'une même catégorie les situations qui relèvent toutes de la soustraction alors que cela n'a rien d'évident.

Ce serait une erreur de penser qu'au CP, il faudrait nécessairement faire simple et donc se contenter d'introduire la soustraction, par exemple, dans une situation de retrait. Les recherches disponibles sur les apprentissages numériques à l'école conduisent à penser qu'enseigner pendant longtemps un signe arithmétique avec sa seule signification banale (soustraire = retirer, diviser = partager, par exemple) fait obstacle au progrès de certains élèves : ils restent enfermés tout au long de leur scolarité dans cette signification banale ; surtout si on leur a longtemps fait croire que cette signification banale est la seule possible ; certains élèves apprennent très tardivement

5. Brissiaud R. & Sander E. (accepté) Arithmetic word problem solving : a Situation Strategy First framework. *Developmental Science*.

6. Rizzolatti G. & Sinigaglia C. (2008) *Les neurones miroirs*. Paris : Odile Jacob.

que la soustraction permet aussi de résoudre des problèmes de comparaison ; et certains n'apprennent jamais qu'elle permet de résoudre des problèmes de complément (« *Eric a 17 billes ; il en gagne et après il en a 31. Combien de billes a-t-il gagnées ?* ») parce qu'ils ne comprennent pas qu'on puisse utiliser la soustraction pour un problème qui parle d'un gain : c'est contraire à ce qu'on leur a dit pendant longtemps à l'école.

Ainsi, le moment où il convient d'introduire les signes opératoires dans le cursus scolaire et le choix de la situation qu'il convient de privilégier ce jour-là sont l'objet de débats[7]. Par exemple, il n'est pas simple de répondre à la question : « Faut-il introduire le signe "– " dans une situation où l'on cherche le résultat d'un retrait ou dans une situation de comparaison ? » Rappelons d'ailleurs qu'il existe deux versions de *J'apprends les maths CP* :
– la version *Picbille* dans laquelle les élèves découvrent le signe « – » dans une situation de retrait puis font progressivement le lien avec son usage dans une situation de comparaison ;
– la version *Tchou* dans laquelle les élèves découvrent le signe « – » dans une situation de comparaison puis font progressivement le lien avec son usage dans une situation de retrait.
Les deux progressions ont en commun que dès le CP, les élèves rencontrent ces deux significations de la soustraction.

L'acquisition de principes arithmétiques tels que la commutativité de l'addition

En fait, cette troisième dimension du progrès a partie liée avec la précédente. Considérons par exemple le problème suivant : « *Pierre a 3 billes ; il gagne 28 billes ; combien de billes a-t-il maintenant ?* ». L'élève qui le résout en calculant 28 + 3 = 31 considère 28 comme le nombre d'objets dans la collection de départ et 3 comme la valeur de l'ajout, alors que dans l'énoncé c'est l'inverse qui est explicité. Il résout ce problème comme s'il s'agissait de : « *Pierre a 28 billes ; il gagne 3 billes ; combien de billes a-t-il maintenant ?* ». De même que la soustraction permet de traiter avec la même opération arithmétique des situations aussi différentes que celles de retrait et de comparaison, l'addition permet de traiter en utilisant le même calcul des situations qui ont des déroulements temporels très différents (rappelons qu'on appelle la relation 28 + 3 = 3 + 28 la « commutativité » de l'addition).

De manière générale, comprendre une opération arithmétique, c'est comprendre qu'on peut se comporter de la même manière (utiliser la même addition, la même soustraction) dans des situations différentes. Il ne faut pas enseigner le contraire aux élèves : que le signe « + » serait une simple abréviation sténographique de l'ajout (alors qu'on peut se libérer des contraintes temporelles de cet ajout !) ou que le signe « – » serait une simple abréviation sténographique du retrait (alors qu'il permet également de traiter les situations de comparaison ou de recherche d'un complément !).

C'est d'ailleurs parce que les élèves de CP sont dans leur grande majorité incapables de comprendre les principes arithmétiques qui fondent la multiplication et la division qu'il vaut mieux éviter tout usage du signe « x » au CP pour la multiplication et tout usage du « ÷ » au CP et au CE1 pour la division. Cette idée est développée plus loin dans ce chapitre et surtout dans le chapitre 5.

Problèmes inhabituels et usage des signes arithmétiques

Il reste trop peu connu qu'un enfant peut résoudre un problème de soustraction (ou d'addition à trou), comme celui des kiwis, ou encore un problème de multiplication (« *Combien y a-t-il de gâteaux dans 3 paquets de 5 gâteaux ?* », par exemple) avant d'être capable d'identifier que ces problèmes sont respectivement des problèmes de soustraction (ou d'addition à trou) ou de multiplication, et donc avant même que l'enseignant ait fait des leçons sur la soustraction ou la multiplication. Ce sont les I.O. de 1978 qui, les premières, ont distingué la « résolution empirique » d'un problème (en simulant ce que dit l'énoncé avec du matériel, par exemple) de sa résolution à l'aide d'une opération arithmétique. En psychologie, on parle le plus souvent de procédures ou stratégies « informelles ».

Il s'agit là d'un des principaux acquis de la recherche pédagogique de ces 30 dernières années. En effet, avant 1970, on ne proposait pratiquement jamais de problèmes de soustraction, de multiplication ou de division avant d'avoir introduit les signes opératoires et étudié ces opérations. Mais dès cet instant, face à un problème, l'« élève modèle » ne devait pas se contenter de donner la réponse numérique attendue (pour le problème des kiwis, 5 kiwis, par exemple), ce qui est déjà difficile à ce niveau de la scolarité. La réponse correcte ne suffisait pas : il fallait que l'enfant écrive d'abord une égalité telle que « 3 +… = 8 » ou « 8 – 3 =… » et qu'il fasse comme si la solution numérique (le nombre 5) découlait de cette écriture.

Insistons sur ce point : dès qu'un problème est différent de ceux que l'enfant rencontre de manière très fréquente à l'école, ce n'est pas en posant une opération arithmétique que les enfants trouvent la solution, c'est en simulant ce qui est dit dans l'énoncé avec du matériel ou par un geste mental équivalent.

Leur demander **après coup** d'écrire une égalité peut constituer une occasion d'apprentissage, mais seulement si les enfants sont en mesure de comprendre la relation qui existe entre cette écriture et le problème. Ainsi, dans le problème des kiwis, certains enfants qui ont trouvé la solution 5 sur leurs doigts peuvent-ils comprendre l'égalité « 3 + 5 = 8 » parce qu'ils peuvent l'interpréter comme : « Les 3 kiwis que je vois plus les 5 qui sont cachés, ça fait 8 kiwis. » Dans ce cas, l'écriture, loin de nuire, peut permettre certaines généralisations.

7. Brissiaud R. (2008) L'enseignement de l'arithmétique élémentaire et l'approche historico-culturelle en éducation. *In* M. Brossard & J. Fijalkow (Eds) : *Vygotski et les recherches en éducation et en didactiques*. p. 181-196.

En revanche, considérons à nouveau le problème qui nous a servi d'exemple de « problème difficile » au début de ce chapitre :

Pierre prend ses billes pour aller en récréation.
Pendant la récréation, il joue et il perd 5 billes.
En rentrant de récréation, Pierre a 3 billes.
Combien Pierre avait-il de billes avant la récréation ?

Les enfants de CP qui réussissent font généralement des essais : « Si Pierre a pris 6 billes, il en perd 5, il lui en reste 1, ça ne va pas. Si Pierre a pris 7 billes… » Et si on leur faisait remarquer que leur résultat (8) est aussi la somme de 5 et 3, ils seraient incapables d'établir le moindre rapport entre la situation et cette écriture (Pierre perd des billes et il faut faire une addition !). En revanche, cette intervention pédagogique peut avoir des effets pervers, car l'addition risque d'apparaître aux enfants comme un procédé qui permet d'avoir la solution même quand on ne comprend pas. On ne s'étonnera pas, dès lors, qu'ils posent une addition dès qu'ils ne maîtrisent plus la signification d'un problème.

L'enjeu est donc d'importance, car, lorsqu'on oblige précocement les enfants à trouver quelle opération arithmétique permet de résoudre un problème (une addition ? une soustraction ?), beaucoup d'entre eux ne cherchent même plus à comprendre l'énoncé : soit ils font systématiquement une addition, soit ils choisissent une opération selon des indices superficiels (ce qui vient d'être étudié en classe, ou encore des mots tels que « en tout », « reste », « perd »…).

Circonstance aggravante : les problèmes d'addition sont assez fréquents à ce niveau de la scolarité, aussi les enfants qui additionnent systématiquement tous les nombres obtiennent-ils souvent la bonne solution. Ils l'obtiennent par hasard. C'est ainsi qu'ils ont tantôt « bon », tantôt « faux », de façon incompréhensible. À la longue, l'activité mathématique risque vraiment de leur apparaître comme une manipulation de symboles selon des règles mystérieuses, au lieu d'être un moyen d'anticiper, par ces symboles, le résultat d'actions ou de mises en relation.

Problèmes habituels et usage des signes arithmétiques

Le cas de l'addition et de la soustraction

Depuis 1882, le signe « + » a toujours été utilisé par les pédagogues en classe de CP. Cela n'a pas toujours été le cas du signe « – » : en effet, l'usage de ce signe n'était plus enseigné au CP entre 1970 et 1990 (*J'apprends les maths* a été le premier manuel à rétablir cet enseignement). Aujourd'hui, l'enseignement du signe « – » dès ce niveau de la scolarité semble relever de l'évidence. On peut même regretter que la plupart des pédagogues aient oublié les raisons qui avaient temporairement conduit à son abandon (éviter que la soustraction soit étroitement associée à la recherche du résultat d'un retrait).

Remarquons tout d'abord que, lorsqu'on introduit une écriture telle que 8 + 6 =… (ou 8 – 6 = ...) en relation avec **un problème « facile »** comme « *Pierre a 8 billes. Paul a 6 billes. Combien Pierre et Paul ont-ils de billes ensemble ?* » (ou « *Pierre a 8 billes. Il en perd 6...* »), les enfants donnent rapidement un sens assez général à cette écriture, même lorsqu'elle est utilisée en dehors de tout contexte précis. C'est ainsi qu'en présence de « 8 + 6 =… », les enfants comprennent que dans un lieu déterminé, il y a « certaines choses » au nombre de 8, 6 « autres choses » et qu'il s'agit de connaître le nombre total de « choses ». Cette forme spécifique d'énoncé qu'est « 8 + 6 =… » ne pose rapidement plus de problème de compréhension. Dans cette nouvelle édition de *J'apprends les maths*, on demande d'ailleurs aux élèves d'inventer d'autres histoires qui conduiraient à un problème qu'on peut résoudre avec la même égalité.

C'est pourquoi les écritures et les situations concrètes n'entretiennent absolument pas le même type de rapport lorsqu'elles sont utilisées dans des problèmes habituels et des problèmes inhabituels ou « situations-problèmes » :

– Dans les situations-problèmes, ce sont les situations concrètes qui sont premières, les écritures ne sont utilisées que dans un second temps, quand elles le sont !

– Dans les leçons où l'on enseigne un savoir-faire fondamental comme le calcul mental, très rapidement (c'est-à-dire dès que l'écriture est comprise) c'est l'écriture qui est première : il s'agit, par exemple, de calculer 8 + 6. Et si l'on évoque une situation concrète (les « nombres comme Dédé » ou la boîte de Tchou), **ce n'est pas pour comprendre cette écriture,** c'est parce que cette situation concrète a des propriétés spécifiques (les objets y sont groupés par 5 ou 10, par exemple) qui vont aider au calcul mental.

Le fait que l'écriture soit rapidement première, lors de l'apprentissage d'un savoir-faire en calcul mental, est essentiel : c'est la garantie que le savoir-faire travaillé se présente d'emblée **sous une forme générale** qui peut être reconnue par l'enfant. Précisons cette idée : lorsqu'un enfant résout un problème concret qui commence, par exemple, par « Un boulanger a fabriqué… » et qu'on demande ensuite à l'enfant ce qu'il a fait, il répond souvent : « J'ai fait un problème de boulanger. » Et cela quelle que soit la structure mathématique du problème. C'est le contexte qui prime. En revanche, lorsqu'on annonce dès le début d'une leçon qu'on va apprendre à calculer 8 + 6 ou 9 – 2, ce savoir-faire est reconnu par l'enfant et sera ainsi mieux réinvesti. Il s'agit dans ce cas, en parlant comme Fijalkow à propos de la lecture, d'une **pédagogie « transparente ».**

Le cas de la multiplication et de la division

Avec cette version de *J'apprends les maths*, les élèves sont fréquemment confrontés à des problèmes où ils cherchent combien il y a d'objets dans un nombre donné (3, par exemple) de groupes de 2, 5 ou 10 objets (« *Combien y a-t-il de fleurs dans 3 bouquets de 5 fleurs ?* » par exemple, ou encore : « *Combien y a-t-il de fleurs dans 3 fois 5 fleurs ?* »). Ils sont également entraînés à trouver la moitié des 20 premiers nombres pairs (partage en 2).

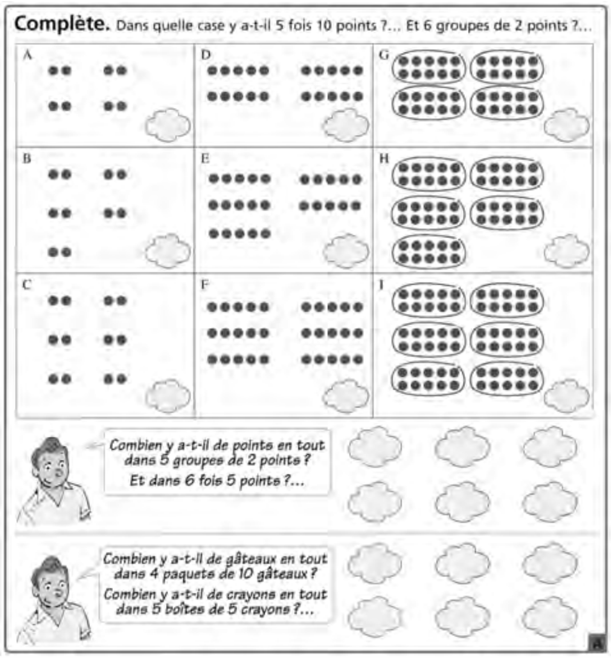
Doit-on considérer que les élèves ont ainsi commencé à apprendre la multiplication et la division dès le CP ou plus simplement qu'on a seulement préparé un apprentissage qui s'effectuera au CE1 pour la multiplication et au CE2 pour la division ?

Si, comme nous le pensons, l'apprentissage de la multiplication ne commence véritablement que lorsque les élèves apprennent qu'il y a le même nombre d'objets dans 3 groupes de 5 objets que dans 5 groupes de 3 objets (commutativité de la multiplication), cet apprentissage ne doit pas être considéré comme ayant commencé au CP. Une recherche récente[8] met bien en évidence que la connaissance de la commutativité n'a rien d'évident. Des enfants brésiliens de 10-12 ans qui n'étaient jamais allés à l'école (des enfants de la rue) se sont vus proposer le problème suivant : « *Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros l'un ?* » Le taux de réussite est de… 0%. Les connaissances numériques de ces enfants seraient-elles limitées aux 100 premiers nombres ? On est sûr du contraire parce que le problème : « *Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros l'un ?* », lorsqu'il est proposé aux mêmes enfants, conduit à… 75% de réussite ! L'échec au premier problème s'explique donc du fait que ces enfants ne savent pas que le calcul de 50 fois 3 peut être remplacé par celui de 3 fois 50. C'est la commutativité de la multiplication qui leur fait défaut. Il est raisonnable de penser que les élèves de CP sont dans leur grande majorité incapables de comprendre cette propriété de la multiplication. Nous avons choisi de différer l'introduction du signe « x » au CE1.

De même, si, comme nous le pensons, l'apprentissage de la division euclidienne ne commence véritablement que lorsque les élèves apprennent que pour effectuer un partage de 23 objets en 5 parts égales on peut imaginer un groupement de ces 23 objets par groupes de 5 (« *En 23, combien de fois 5 ?* »), cet apprentissage ne doit pas être considéré comme ayant commencé au CP, ni même au CE1.

L'acquisition des principes arithmétiques qui fondent la multiplication (la commutativité) et la division (on peut résoudre un problème de partition par un geste mental de quotition et réciproquement) n'est pas optionnelle : tous les chercheurs sérieux dans le domaine affirment que la mémorisation des relations numériques comme l'acquisition des procédures de calcul dépend de l'acquisition de ces principes arithmétiques. Et faire croire aux élèves qu'ils ont commencé l'apprentissage de la multiplication ou de la division alors qu'ils n'ont pas encore commencé à en aborder les propriétés essentielle ne serait pas leur rendre service.

En revanche, une question se pose : comment, concernant les problèmes de groupement ou de partage, enseigner des savoir-faire généraux ? Comment éviter qu'après avoir résolu un problème où l'on forme 4 bouquets de 5 fleurs, l'élève n'en conserve que l'idée qu'il a résolu un problème de fleuriste ? Cette question reçoit deux réponses dans l'édition 2009 de *J'apprends les maths :*
– D'une part nous utilisons un outil pédagogique qui favorise une telle généralisation : un tableau de points groupés par 2, 5 et 10 qui sert aux élèves à raisonner sur ces groupes de points comme s'il s'agissait de paquets de gâteaux, de bouquets de fleurs, d'équipes d'enfants, etc. (ce type de tableau est utilisé dans les séquences pp. 66, 98 et 122). L'usage répété de cet outil joue le rôle du symbolisme arithmétique : il aide les élèves à construire la catégorie des problèmes qu'il permet de résoudre.



– D'autre part, l'utilisation du mot « *fois* » pour décrire l'action d'ajouts répétés d'un même nombre favorise aussi cette généralisation. Lorsqu'un enfant a conscience que pour dessiner 4 bouquets de 5 fleurs, il lui faut dessiner 4 ***fois*** 5, il comprend mieux les propriétés communes à cette action et à celles qui conduisent à former 4 équipes de 5 enfants, 4 paquets de 5 gâteaux, etc. Piaget aurait dit : l'enfant construit le *schème* de cette action.

Résumé

Tous les pédagogues s'accordent à penser que la résolution de problèmes doit avoir une place importante dans la pédagogie des mathématiques, mais cet apprentissage soulève de nombreuses difficultés.

Tout d'abord, l'enseignant doit distinguer entre les problèmes habituels, ceux qu'il proposera de nom-

8. Schliemann, A. D., Araujo, C., Cassundé, M. A., Macedo, S. & Nicéas, L. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 422-435.

breuses fois à ses élèves parce qu'ils jouent un rôle clé dans la progression pédagogique, et les problèmes inhabituels. Dès qu'un problème est seulement proposé de manière occasionnelle et qu'il est énoncé verbalement, c'est-à-dire à travers « une petite histoire », les enfants ont le plus grand mal à se représenter mentalement la situation. Le plus souvent, l'énoncé lui-même n'est tout simplement pas compris.

Il serait alors dangereux d'exiger précocement des enfants qu'ils écrivent systématiquement et directement la bonne opération arithmétique. Ils doivent pouvoir manipuler, dessiner, compter, calculer oralement pour trouver la solution à un problème occasionnel. Les contraindre à faire comme si cette solution avait été obtenue en posant une opération arithmétique a des effets pervers. À terme, certains enfants risquent de ne plus chercher à comprendre l'énoncé, tout attentifs qu'ils sont à chercher la bonne opération à partir d'indices superficiels.

Quant aux problèmes habituels, ceux qui servent de supports privilégiés à l'introduction des notions arithmétiques, ils peuvent être à l'origine d'une autre difficulté : l'enseignant doit éviter d'enseigner sur une longue durée que le signe « + » serait une simple abréviation sténographique du verbe « ajouter » et le signe « – » du verbe « retirer ». Il doit suffisamment tôt dans sa progression enseigner les principes arithmétiques qui fondent ces opérations (la commutativité de l'addition, le fait que la soustraction permette de résoudre des problèmes de comparaison, par exemple) parce que, sinon, certains élèves s'enferment dans la signification banale des signes opératoires.

Concernant les problèmes de groupement et de partage, mieux vaut différer l'usage des signes opératoires que de les enseigner alors que les élèves ne peuvent pas comprendre les principes arithmétiques qui expliquent que l'homme ait inventé de tels symboles. Pour autant, les élèves peuvent être confrontés aux problèmes correspondants de manière répétée, et un outil tel que des tableaux de points favorise l'acquisition de connaissances numériques générales en relation avec ces problèmes (« 3 groupes de 5 objets, c'est 15 objets », par exemple).

Terminons enfin en soulignant à nouveau l'intérêt des situations où il s'agit d'**anticiper le résultat d'une action**. Si c'est l'élève lui-même qui réalise l'action, les problèmes sont **autocorrectifs** parce qu'il a la possibilité de **vérifier sur les objets ses anticipations**. Dans la confrontation avec ces situations-problèmes autocorrectives, l'enfant apprend que résoudre un problème arithmétique, c'est se donner un pouvoir d'anticipation sur la réalité.

Lorsque c'est le maître qui exécute l'action, la situation est très proche du point de vue de la vérification, et, de plus, les travaux de neuropsychologie montrent que cela favorise la simulation mentale de l'action chez les élèves.

Cette façon d'énoncer les problèmes vaut tout autant pour les problèmes habituels (cela favorise l'accès au calcul mental) que pour les problèmes occasionnels (cela favorise la compréhension de leur énoncé).

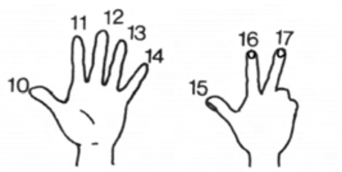
Chapitre 2

COMPTAGE, CALCUL SUR LES OBJETS ET CALCUL MENTAL DE L'ADDITION

Considérons le problème suivant[1] : « *J'ai 9 jetons dans ma poche gauche et 8 jetons dans la droite. Je vais les mettre sur la table, combien y aura-t-il de jetons ?* »

– Pour le résoudre, certains enfants dessinent 9 ronds puis 8 ronds, avant de recompter 1 à 1 l'ensemble des ronds qu'ils ont dessinés (ils « recomptent le tout »). D'autres disent « neuf », sortent 8 doigts et comptent « au-dessus de 9 » :

Neuf,



Dans ces deux procédures, les objets ou les doigts sont égrenés les uns après les autres en récitant la suite des nombres ou du moins un extrait de cette suite : il s'agit de procédures de comptage.

– D'autres enfants énoncent que « 9 plus 8 est égal à 17 », sans dessiner ni sortir des doigts. Ceux-là connaissent déjà cette relation numérique ou bien savent faire un calcul mental. Ce calcul mental peut demander un certain temps, car tant que les enfants ne connaissent pas « par cœur » le résultat, ils ont besoin de le reconstruire « dans leur tête ».

La question qui nous intéresse ici est celle-ci : comment aider les enfants à accéder au calcul mental ? Deux idées essentielles sont avancées dans ce chapitre :

La première est que, pour penser une pédagogie du calcul mental, il ne faut pas seulement concevoir le calcul mental en le distinguant des différentes stratégies de comptage, comme celles qui ont été décrites plus haut (recompter le tout ou compter « au-dessus de 9 »). Il faut distinguer le calcul mental du « calcul sur les objets ». Calcul mental et calcul sur les objets ont en commun qu'il s'agit de stratégies de décomposition.
Considérons par exemple cet enfant qui, pour résoudre le problème précédent (9 + 8 = ?), sort 9 doigts devant lui (directement, sans les compter un à un), qui fixe attentivement son petit doigt baissé et qui annonce le résultat « 17 ». Interrogé sur sa façon de faire, il répond : « *parce qu'avec celui-là (le petit doigt baissé) ça fait 10 et il faut encore 7* »[2].

Cet enfant ne compte pas puisqu'il n'égrène pas ses doigts 1 à 1 en récitant la suite des nombres, mais il ne fait pas non plus du calcul mental puisqu'il a besoin de sortir ses doigts pour trouver la solution. Nous dirons que cet enfant « calcule sur des objets » (en l'occurrence, il « calcule sur ses doigts »). La stratégie qu'il utilise consiste à décomposer le second nombre, 8, en 1 (correspondant au doigt baissé) et encore 7.

Selon la seconde idée qui sera avancée, c'est en favorisant une « mentalisation du calcul sur les objets », au moyen d'images mentales appropriées, qu'on aide le mieux les enfants à accéder au calcul mental et à mémoriser le répertoire additif. Cette proposition va à l'encontre de l'opinion selon laquelle un enfant pourrait apprendre « par cœur » toutes les phrases analogues à « neuf plus huit égale dix-sept ». (Il y en a 100 différentes qui constituent les « résultats de tables d'addition ».) En fait, la mémorisation du répertoire additif est un phénomène complexe bien loin d'être achevé en fin de CP (*cf.* suite du chapitre).

Plan du chapitre

Compter vs. calculer : comptage ou décompositions ?

Une distinction pertinente dès les premiers apprentissages

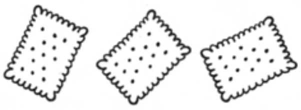
La distinction entre « compter des objets » et « calculer sur des objets » aide à mieux comprendre les tout premiers apprentissages numériques, ceux qui se situent dès la petite ou la moyenne section de maternelle[3].

1. Dans ce chapitre, on s'intéressera à des calculs sur les petits nombres qui ne nécessitent pas l'emploi d'une technique opératoire comme l'addition en colonnes. Le problème pédagogique posé par cette technique est abordé dans le chapitre 5.

2. On aura reconnu dans cette procédure un « passage de la dizaine ».

3. Les idées qui suivent ont récemment été développées dans l'ouvrage suivant : Brissiaud R. (2007) *Premiers pas vers les maths*. Paris : Retz.

Ainsi, considérons la situation suivante : un enfant de 3 ans ne sait pas encore reconnaître une quantité de 3 objets, et il s'apprête à manger 3 gâteaux disposés ainsi devant lui :



L'adulte lui demande alors :
Adulte : *Combien vas-tu manger de gâteaux ?*
L'enfant ne sachant pas répondre, il y a deux interventions possibles pour l'adulte. Une première consiste à enseigner le comptage :
Adulte : *Il y en a 3, tu vois 1, 2, 3* (en comptant).
Une autre possibilité consiste à demander à l'enfant :
Adulte : *Est-ce que c'est 2 gâteaux que tu vas manger ?*

On espère alors que l'enfant reconnaisse « 2 gâteaux » dans les 3 qui lui sont présentés[4], et qu'il réponde :
Enfant : *Je vais manger 2 et encore celui-là.*
L'adulte peut alors préciser :
Adulte : *Oui, 2 et encore 1, tu vois, c'est 3.*

Il est essentiel de remarquer qu'il s'agit là de deux stratégies de quantification très différentes. En effet, dans le cas du comptage, les objets sont égrenés les uns après les autres en prononçant les mots-nombres (un, deux, trois) dans l'ordre conventionnel. L'enfant qui emploie l'autre stratégie définit un nombre qui lui est inconnu à l'aide d'autres qui lui sont connus, les nombres « deux » et « un », avant que l'adulte dénomme le nouveau nombre : « il s'appelle trois ». Ce dialogue est une sorte de paraphrase de l'égalité 2 + 1 = 3. Comme cette situation exige la présence des objets (ici les gâteaux), nous parlerons de « calcul sur les objets »[5].

Une stratégie serait-elle préférable ? Il serait imprudent, en tout cas, de négliger la seconde, car le comptage conduit à des difficultés spécifiques. Ainsi le dialogue suivant est-il très fréquent avec des enfants de 3/4 ans :

Adulte : *Combien y a-t-il de jetons ?*
Enfant (en comptant les jetons) : *Un, deux, trois, quatre, cinq.*
Adulte : *Oui, alors combien y a-t-il de jetons ?*
Enfant (recomptant les jetons) : *Un, deux, trois, quatre, cinq.*
Adulte : *Je suis d'accord, mais combien y a-t-il de jetons ?*
Enfant (recomptant les jetons) : *Un, deux, trois, quatre, cinq.*

Cet enfant prononce bien chaque mot-nombre en pointant un nouveau jeton de la collection, mais il n'isole pas le dernier mot-nombre prononcé pour répondre à la question posée. Dès que l'enfant entend « combien », il compte et reste apparemment incapable d'exploiter ce comptage pour exprimer la quantité[6].

Or l'explication la plus probable de ce comportement est la suivante : lorsqu'un enfant compte, il dit chacun des mots-nombres (« un », « deux »…) en pointant successivement chacun des objets avec le doigt et, de son point de vue, chaque mot-nombre se rapporte à l'objet pointé : il y a « le un », « le deux », « le trois », « le quatre », « le cinq ». Le dernier mot-nombre prononcé « cinq » est lui aussi une sorte de numéro : il réfère à l'objet pointé, c'est-à-dire au seul dernier objet et non au nombre d'objets, qui est une propriété de la totalité de ces objets (c'est pourquoi j'ai proposé d'appeler ce type de comptage un comptage-numérotage).

En fait, ces enfants ne font qu'employer les mots-nombres comme ils le feraient de tout autre mot : lorsqu'on dénomme des objets de façon qualitative en prononçant, comme dans un comptage, des mots tous différents : « gomme, trousse, stylo, cahier », le dernier mot prononcé, « cahier », réfère à l'objet ainsi nommé et en aucun cas à l'ensemble des objets. Ils emploient les mots-nombres comme dans les expressions « j'habite au 7 », « c'est le 2 qui a gagné », « nous sommes le 12 »… Dans tous les cas, le chiffre réfère à un élément, l'idée de quantité est absente.

Dans le contexte du comptage, les mots-nombres ont donc un fonctionnement linguistique très spécifique. En revanche, dans le contexte du calcul, si élémentaire que soit ce calcul (2 + 1 = 3, par exemple), chaque mot-nombre prononcé renvoie directement à une quantité, c'est-à-dire au concept même qu'il s'agit de construire. Quand l'adulte dit : « Oui, 2 et encore 1, tu vois ça s'appelle 3 », c'est la logique langagière de la décomposition des nombres, c'est-à-dire celle du calcul, qui est privilégiée. Le langage est alors une aide et non un obstacle comme dans le cas du comptage-numérotage.

En fait, il suffit d'observer les interactions entre les jeunes enfants et leurs éducateurs (parents, enseignants…) pour s'apercevoir que ceux-ci ne privilégient pas systématiquement le comptage. Ainsi, une des rares études des interactions langagières mères-enfants à propos du nombre[7] montre-t-elle que les

4. Cet espoir est très raisonnable car les enfants savent très précocement reconnaître et dénommer une quantité de 2 objets; ils savent même souvent le faire avant de savoir compter jusqu'à 2 (*cf.* Fischer J.-P., 1984, L'appréhension du nombre par le jeune enfant, *Enfance,* n° 2, pp. 167-168).

5. Dans Brissiaud (1989), ce terme n'était pas encore utilisé. Il nous semble tout d'abord que son emploi rend l'exposé plus clair. Par ailleurs, lorsqu'on réserve l'emploi du mot « calcul » aux cas où ce calcul est mental (lorsqu'on ne parle pas de « calcul sur les objets »), on est conduit à penser que l'apprentissage du comptage précède celui du calcul alors qu'une des thèses essentielles que nous voudrions avancer est que ces 2 apprentissages doivent être conduits parallèlement.

6. Schaeffer, Eggleston et Scott sont les premiers, semble-t-il, à avoir remarqué ce phénomène (*cf.* Schaeffer B., Eggleston V.H. & Scott J.-L., 1974, Number development in young children, *Cognitive Psychology*, 6, pp. 357-379).

7. Durkin K., Shire B., Riem R., Crowther R.D. & Rutter D.R., 1986, The social and linguistic context of early number word use, *British Journal of Developmental Psychology*, 4, pp. 269-288.

mères se méfient souvent du comptage et qu'elles ont alors avec leur enfant des dialogues comme celui-ci :

> LA MÈRE (qui est filmée dans une pièce avec son fils Steph, 30 mois) : *Combien y a-t-il de caméras ici ?…*
> ENFANT : ?
> LA MÈRE : *Quatre caméras.*
> ENFANT : *Quatre caméras ?*
> LA MÈRE : *Oui, une là, une là, et il y en a une là et encore une là.*

Si cette mère avait compté « un, deux, trois quatre », elle aurait prononcé « quatre » alors qu'elle pointait une seule caméra (« la quatre »). C'est pourquoi elle est attentive à proposer comme synonyme de « quatre » la suite « une, une, une et encore une ». Elle pense ainsi que « quatre » sera mieux compris. De cette façon, elle réserve l'usage de « quatre » pour désigner la totalité, la quantité. Elle utilise la logique langagière de la décomposition des nombres (4 = 1 + 1 + 1 + 1) et non celle du comptage. Les auteurs de cette étude précisent que ce type d'observation n'est pas anecdotique, qu'il est fréquent.

Dès les premiers apprentissages, donc, deux stratégies de quantification peuvent être enseignées qui, toutes deux, nécessitent la présence des objets : le comptage des objets, mais aussi le calcul sur ces objets. Dans le comptage, les objets sont égrenés les uns après les autres alors que, dans le calcul sur les objets, on cherche dans une quantité donnée des quantités plus petites, qui sont immédiatement reconnues (ici 2 et 1) pour décrire la quantité totale. Dans l'une et l'autre stratégie, l'enfant utilise les mots-nombres, mais ils n'ont pas la même signification. Dans le calcul sur les objets, les mots-nombres réfèrent explicitement à des quantités ; dans le comptage, cette référence n'est pas explicite.

La notion de calcul sur les objets, telle qu'elle vient d'être définie, semble cependant d'une portée bien limitée. En effet, un enfant ne peut reconnaître 3 sous la forme 3 = 2 + 1 que dans la mesure où 2 est reconnu quasi immédiatement, d'un seul coup d'œil. Aussi, ce type de traitement semble limité aux très petites collections[8]. Qu'en est-il du calcul sur les objets quand les nombres sont plus grands ?

Au-delà, il existe un outil qui permet de reconnaître rapidement les quantités supérieures à 4, sans comptage un à un, et qui permet donc à l'enfant de continuer à utiliser ce type de procédure pour des quantités supérieures à 4 : il s'agit de ses 10 doigts, structurés en deux groupes de 5. Lorsqu'on nous présente 9 bâtons alignés, il faut les compter pour savoir combien il y en a. Avec 9 doigts, la réponse est quasi immédiate.

Compter sur ses doigts et calculer sur ses doigts

Dans un travail de recherche important, qui a eu de nombreux prolongements, deux psychologues américains[9] ont étudié comment des enfants de 5 ans déterminent le résultat d'additions telles que 4 + 3 et 6 + 3 (la somme est inférieure ou égale à 10). L'entretien avec les enfants était filmé et l'analyse des documents vidéo montre que ces enfants utilisent différentes stratégies pour trouver le résultat. C'est ainsi que ces chercheurs distinguent deux sortes d'usage des doigts.

Pour 6 + 3, par exemple, certains enfants lèvent l'un après l'autre 6 doigts en les comptant un à un, puis ils en lèvent 3 autres, et enfin recomptent l'ensemble des doigts sortis. D'autres enfants sortent directement 6 doigts, en lèvent 3 autres et énoncent directement 9, sans recompter les doigts sortis.

Ce dernier comportement s'interprète facilement : ces enfants savent comment 6 est formé sur les doigts (6 = 5 + 1). Ils lèvent 3 autres doigts et là encore ils reconnaissent directement 9 grâce au repère 5 (9 = 5 + 4). Il s'agit bien d'une procédure où chaque mot-nombre est directement associé à une quantité qui lui correspond, sans comptage 1 à 1 : ces enfants calculent sur leurs doigts.

De même, pour 4 + 3, certains enfants lèvent l'un après l'autre 4 doigts en les comptant un à un, puis 3 doigts sur l'autre main et recomptent l'ensemble des doigts sortis. D'autres enfants sortent directement 4 doigts sur une main, 3 doigts sur l'autre et, là encore, énoncent directement le résultat. Ils ne comptent pas (on dispose d'enregistrements vidéo d'enfants de 5 ans qui répondent ainsi ; or à cet âge, lorsqu'un enfant compte, on observe une suite de fixations du regard et ces fixations s'accompagnent d'autant de hochements de tête ; aussi lorsqu'un enfant compte, la vidéo permet de le détecter avec sûreté). Ces enfants ne comptent donc pas. Que se passe-t-il dans leur tête ?

Il est vraisemblable que, là encore, ces enfants savent reconnaître rapidement un nombre de doigts supérieur à 5, mais, évidemment, cette reconnaissance n'est immédiate que quand une main est complète. Ce sont en effet les configurations correspondant à 5 + n qui ont été mémorisées. Or, ils ont sorti 4 doigts sur une main et 3 sur l'autre. Ils complètent donc mentalement la première main avec un des doigts de la seconde (4 + 1 = 5) avant d'ajouter les 2 doigts restants sur l'autre main. Il s'agit en quelque sorte d'un « passage du cinq », 4 + 3 = (4 + 1) + 2, c'est-à-dire d'une procédure analogue au « passage de la dizaine » : 9 + 3 = (9 + 1) + 2.

8. Le phénomène de la reconnaissance quasi instantanée d'une quantité donnée a été appelé *subitizing* par les psychologues. De nombreux travaux, notamment ceux de J.-P. Fischer, montrent qu'il se limite aux 3 premières quantités.

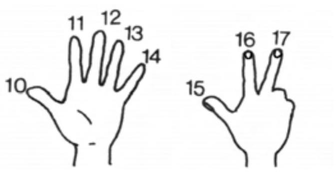
9. Siegler R.S. & Robinson M., 1982, The Development of numerical understandings, *in* H.W. Reese & L.P. Lipsitt (Eds), *Advances in Child Development and Behavior,* vol. 16 (pp. 241-312), New York, Academic Press.

Pour déterminer une somme inférieure à 10, donc, on observe deux sortes d'usage des doigts : le comptage sur les doigts, quand l'enfant égrène ses doigts l'un après l'autre, en récitant la suite des mots-nombres, et un usage global des doigts où chaque mot-nombre (six, trois et neuf pour 6 + 3 = 9) est directement associé à une quantité de doigts, grâce au repère 5. Il semble donc légitime de parler de « calcul sur les doigts ».

Quand la somme est supérieure à 10, elle ne peut plus être représentée sur les deux mains. Dans ce cas, les enfants représentent une seule des 2 quantités sur leurs doigts, mais, là encore, deux sortes de procédure peuvent être distinguées selon que les doigts sont égrenés un à un ou non.

Un premier usage des doigts est une procédure de comptage déjà présentée au début de ce chapitre : s'il s'agit de déterminer 9 + 8, par exemple, l'enfant dit « neuf », il lève 8 doigts, et amorce son comptage après 9 :

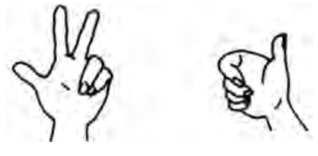
Neuf,



On parle dans ce cas de **surcomptage** (l'enfant compte « au-dessus de 9 »).

Un second usage des doigts est celui de l'enfant, évoqué dans l'introduction de ce chapitre, qui sort 9 doigts devant lui (directement, sans les compter un à un), qui fixe attentivement son petit doigt baissé et qui annonce le résultat « 17 ». Interrogé sur sa façon de faire, il répond « parce qu'avec celui-là (le petit doigt baissé) ça fait 10 et il faut encore 7 ». Cet enfant s'appuie sur l'image de ses doigts pour effectuer un **passage de la dizaine** : 9 + 8 = (9 + 1) + 7.

Une autre procédure est observée dans diverses cultures qui ont toutes en commun de favoriser un usage global des doigts[10]. Ainsi, certains enfants sud-coréens calculent-ils 8 + 6 ainsi : ils baissent les 5 doigts d'une main et en relèvent 3 (8 = 5 + 3), ils baissent les 5 doigts de l'autre main et en relèvent 1 (6 = 5 + 1). Puis ils énoncent le résultat à partir de ce qu'ils voient et des 5 qui ont été mémorisés :



(5 + 3) + (5 + 1) = 14

C'est cette stratégie de calcul qu'on peut appeler un **retour au cinq.**

10. L'exemple rapporté ici provient d'observations d'enfants sud-coréens (Fuson K.C. & Jwon Y., 1991, Systèmes de mots-nombres et autres outils culturels : effets sur les premiers calculs de l'enfant, *in* J. Bideaud, C. Meljac & J.-P. Fischer (Eds), *Les chemins du nombre,* Lille, PUL). On observe des procédures analogues chez certains enfants sourds profonds.

Que la somme soit inférieure ou supérieure à 10, on observe donc deux sortes d'usage des doigts. Dans le cas du comptage (ou du surcomptage), ils sont égrenés les uns après les autres, alors que, dans le calcul sur les doigts, ils sont utilisés globalement et c'est en privilégiant les repères 5 et 10 que la somme est finalement déterminée.

À partir de ces observations, deux questions se posent au pédagogue : en classe, quelle place faut-il accorder au comptage et au calcul sur les doigts ou les objets ? Faut-il enseigner l'un à l'exclusion de l'autre ? Faut-il, si l'on enseigne les deux, qu'un de ces enseignements précède l'autre ?

Privilégier le calcul sur les objets

Nous avons choisi de privilégier l'enseignement du calcul sur les objets. Nous avons déjà signalé quelques caractéristiques intéressantes du calcul sur les objets (ou sur les doigts), et notamment le fait que dans le calcul chaque mot-nombre réfère explicitement à une quantité, alors que dans un comptage cette référence n'est pas explicite. Le lecteur ne sera donc pas étonné de cette décision. Mais faut-il enseigner le comptage ?

Jusque vers le milieu des années 80, le comptage n'était pas une pratique très appréciée des pédagogues. Ainsi, un pédagogue comme Brachet parlait-il du comptage en ces termes, en 1955 :

> « *Ce n'est pas, nous semble-t-il, en remuant l'un après l'autre les quatre jetons d'une collection que l'enfant forme la notion de quatre et des décompositions. Ce serait plutôt, croyons-nous, en contemplant, à bonne distance, et d'une vue d'ensemble, simultanée, la constellation de 4 objets, que l'enfant sera illuminé par le nombre 4, qui est 2 + 2 et 3 + 1.* »

Pour ce pédagogue, comme pour la plupart de ceux de son époque, il fallait enseigner le calcul, et se garder d'enseigner le comptage. Dans la plupart des méthodes destinées aux enseignants de CP, à l'époque, les nombres étaient introduits les uns après les autres. Pour chaque nombre, l'enfant commençait par étudier ses décompositions additives (7 = 6 + 1, 7 = 5 + 2, 7 = 4 + 3, etc.). L'égalité 7 = 6 + 1, par exemple, est associée à une collection de 7 objets, 6 bleus et 1 rouge : c'est donc le calcul sur les objets qui primait[11]. Lorsque l'enfant avait étudié les nombres jusqu'à 7 seulement, on se gardait de lui proposer des activités où il devait compter un ensemble plus grand.

En fait, la réhabilitation du comptage n'a pas été l'œuvre de pédagogues, mais de psychologues dans les années 1980-1990. Leurs observations ont montré que, quelles que soient les pratiques éducatives des

11. Mais ce calcul sur les objets est très différent du calcul sur les doigts décrit plus haut. En effet, 5 n'est pas utilisé comme repère privilégié, aussi l'enfant qui n'a pas construit seul ce repère (en comptant sur ses doigts, par exemple) ne peut-il pas s'appuyer sur une image mentale de la quantité pour se passer des objets. Il est obligé de mémoriser directement les décompositions qu'on lui enseigne, de les mémoriser verbalement, « par cœur » (*cf.* ce qui est dit concernant la mémorisation en fin de chapitre).

enseignants, les enfants savent généralement compter vers 5-6 ans au-delà de ce qu'ils ont appris à l'école[12]. Ce sont les parents qui, le plus souvent, leur ont appris à compter.

Dans les années 1980-1990, les psychologues n'étaient pas tous d'accord sur le rôle du comptage dans l'apprentissage. Certains (Gelman et ses collaborateurs, essentiellement) considéraient que toutes les connaissances numériques des enfants sont en germe dans leurs premiers comptages. D'autres, dont nous étions[13], considéraient que les premiers comptages sont bien souvent un simple rituel et qu'il est avant tout nécessaire que l'enfant apprenne à calculer sur de très petites collections d'objets (3 = 2 + 1, par exemple), car ce sont ces premiers calculs qui lui permettent de comprendre comment fonctionne le comptage.

Le débat sur le rôle du comptage dans l'apprentissage n'est pas clos, mais la quasi-totalité des psychologues s'accordent aujourd'hui à penser qu'en petite section de maternelle, les jeunes enfants ont beaucoup de difficulté à comprendre comment le comptage permet d'accéder au nombre. Les chercheurs sont de plus en plus nombreux à penser que les enfants s'appuient sur d'autres façons de représenter les premiers nombres (les décompositions), pour les comprendre[14].

Par ailleurs, la réhabilitation du comptage dans les programmes de 2002 et dans les documents officiels qui ont accompagné ces programmes a de toute évidence manqué de nuance : il était, par exemple, recommandé d'enseigner le comptage jusqu'à 5 en petite section de maternelle alors que de très nombreux enfants sont incapables de le comprendre à cet âge. Depuis 1990, de nombreux élèves arrivent au CP en sachant compter assez loin mais en n'ayant pratiquement rien compris aux premiers nombres : ils sont incapables du moindre calcul avec ces premiers nombres.

C'est pourquoi, dans cette nouvelle version de *J'apprends les maths CP*, on a évité au maximum de laisser croire aux élèves que l'enjeu des apprentissages numériques à ce niveau de la scolarité serait de savoir compter encore plus loin ! Bien au contraire, de nouvelles activités apparaissent dans cette édition qui visent à ce que les enfants prennent conscience du fait que le comptage 1 à 1 n'est pas le seul moyen d'accès au nombre et qu'il n'est pas le moyen qui doit être privilégié. C'est le cas de celui-ci, par exemple (séquence page 28 folio élève) : les élèves doivent dire les nombres sans compter 1 à 1 mais en utilisant les groupements présents (2 plus 1, 3 et encore 2, 5).

Ainsi, les enfants sont fréquemment amenés à dénombrer une collection en réinvestissant leurs compétences en calcul. Ce type d'intervention pédagogique est indispensable : certains enfants ont tellement pris des habitudes de comptage qu'il convient de travailler explicitement la possibilité de dénombrer une collection sans compter un à un.

Enseigner le calcul sur les doigts ou sur des objets structurés comme eux ?

Après le comptage, nous abordons là un autre objet de controverses : l'usage des doigts. D'où vient l'opprobre jeté sur les doigts ? Nous avons vu que, pour certains enfants, leurs doigts constituent le matériel pédagogique quasi idéal qui les mène au calcul. Mais pour d'autres, c'est rigoureusement le contraire. Le calcul sur les doigts exige de reconnaître globalement un nombre de doigts donné, sans les égrener 1 à 1. Or certains enfants n'arrivent pas à dépasser le comptage sur leurs doigts. Ils les utilisent comme une collection de jetons qu'on porte toujours sur soi. Pour savoir « combien c'est 8 », ils comptent 8 doigts un à un, et ils ne prêtent aucune attention à la configuration correspondante. S'ils doivent à nouveau construire une collection de 8 doigts, ils recommencent à les compter un à un. Ils ne savent généralement pas montrer 8 doigts directement, sans compter. Les nombres 5 et 10 n'ont pas de statut privilégié.

Une première solution consisterait à leur enseigner le « bon usage » des doigts, mais, souvent, il est plus facile d'aider un enfant à investir correctement un nouvel outil (dans le fichier, la boîte de Tchou par exemple) que d'essayer de rééduquer l'usage ancien d'un outil mal investi (les doigts, lorsque leur comptage 1 à 1 est irrépressible). C'est pourquoi, dans le fichier, nous avons choisi la solution suivante : favoriser le bon usage des doigts, sans l'enseigner explicitement, en travaillant fréquemment sur l'image des doigts, pour attirer l'attention des enfants sur les configurations correspondant à un nombre donné. Ce n'est donc pas le calcul sur les doigts qui sera enseigné explicitement, mais le calcul sur des objets qui sont structurés comme les doigts, avec les repères 5 et 10.

Par ailleurs, le calcul sur des objets physiques ou dessinés, plutôt que le calcul sur les doigts, facilite la men-

12. Les travaux qui ont conduit à cette réhabilitation sont trop nombreux pour qu'on puisse les citer tous. Citons seulement :

Gelman R. & Galistel C.R., 1978, *The Child's understanding of number,* Cambridge, Harvard University Press.

Meljac C., 1979, *Décrire, agir et compter : l'enfant et le dénombrement spontané,* Paris, PUF.

Fuson K.C., 1988, *Children's counting and concepts of number,* New York, Springer.

13. Brissiaud R., 1991, Un outil pour construire le nombre : les collections-témoins de doigts, *in* Bideaud J., Meljac C. & Fischer J.-P., *Les chemins du nombre,* Lille, P.U.L.

14. Brissiaud R., 2007, *Premiers pas vers les maths*, Paris, Retz.

talisation (c'est-à-dire la transition du calcul sur les objets au calcul mental). Lorsque des enfants ont appris à calculer en dessinant des collections organisées avec le repère 5, il suffit souvent de les inciter à ne plus dessiner, de les inciter à *remplacer le dessin par l'évocation des images mentales correspondantes* pour les aider à progresser vers le calcul mental. L'abandon des doigts, lui, se justifie moins facilement car, contrairement à un dessin, ils sont toujours disponibles.

En tout état de cause, il est clair que certains enfants utilisent longtemps leurs doigts. Pour tel enfant, l'enseignant pourra l'inciter à s'en passer, pour tel autre, peut-être préférera-t-il qu'il continue à s'en servir, mais il l'incitera à bien s'en servir, c'est-à-dire à utiliser des configurations globales de doigts, structurées à l'aide des repères 5 et 10.

Une progression pédagogique pour enseigner le calcul mental

Puisque nous avons choisi d'enseigner le comptage et le calcul sur les objets, il nous faut successivement examiner quels objets peuvent se substituer aux doigts, puis décrire la place respective du comptage et du calcul sur ces objets. L'option pédagogique fondamentale consiste à faire comparer ces deux procédures. Enfin, nous parlerons du processus de mentalisation, qui, à terme, aboutit à se passer des objets.

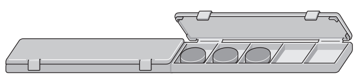
Des objets structurés comme les doigts

Plusieurs sortes de représentation des quantités, qui ont la même structure que les doigts, sont utilisées pour enseigner le calcul sur les objets : la boîte de Tchou, les constellations construites à l'aide de .

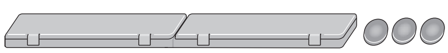
Certains modes de représentation sont attribués de façon privilégiée à un personnage du fichier.

Dédé, par exemple, utilise les constellations construites à l'aide du cinq qu'on trouve sur les dés. Ainsi, 6 et 8 sont représentés de la manière suivante :

Tchou, lui, possède une grande boîte pouvant contenir jusqu'à 10 jetons alignés. Cette boîte est organisée en 2 compartiments de cinq (analogues aux 2 mains), chaque compartiment étant pourvu d'un couvercle. Par convention, Tchou remplit sa boîte à partir d'une extrémité et ferme le couvercle dès qu'un compartiment est plein. Ainsi 8 est-il représenté de la manière suivante :



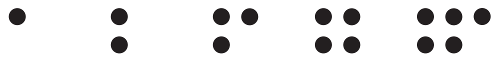
et 13 :



L'usage des constellations a été critiqué, vers 1970, parce qu'il risque d'induire une confusion entre la forme et le nombre, alors que les enfants doivent apprendre que le nombre d'objets d'une collection est indépendant de la configuration spatiale privilégiée.

Ce risque existe. Mais il peut être contenu par des pratiques pédagogiques favorisant la comparaison des différentes représentations des nombres parce que celles-ci correspondent à des configurations différentes. Dans la démarche que nous proposons, nous avons fait le choix pédagogique fondamental d'utiliser plusieurs modes de représentation des nombres qui privilégient les groupements de 5 et 10 : les collections de doigts, la boîte de Tchou et les nombres « comme Tchou » (les points sont dessinés alignés, avec un blanc pour le repère 5, comme s'il s'agissait de jetons disposés dans la boîte), les nombres « comme Dédé » (constellations).

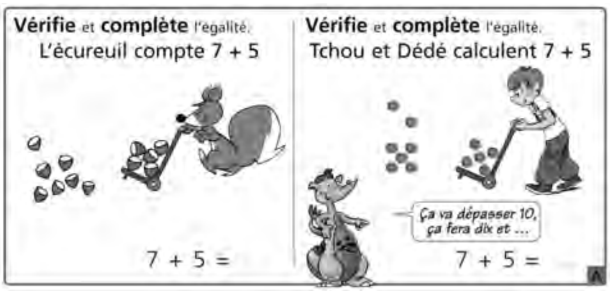
De plus, dans cette édition de *J'apprends les maths CP*, une nouvelle façon de représenter les nombres est introduite : les nombres « comme Perrine ». Cette représentation favorise de nouvelles analyses et décompositions : cinq points dessinés comme Dédé seront spontanément décomposés en 4 et 1, cinq points dessinés comme Perrine se décomposeront en 4 et 1 (comme Dédé) mais aussi en 3 et 2.



C'est en comparant fréquemment ces différentes représentations et en les analysant à l'aide des décompositions que l'enfant sera conduit à reconnaître immédiatement 5 jetons parce qu'il y en a : « 3 ici et encore 2 là », ou bien : « 2, 2 et encore 1 », quelles que soient les configurations correspondantes.

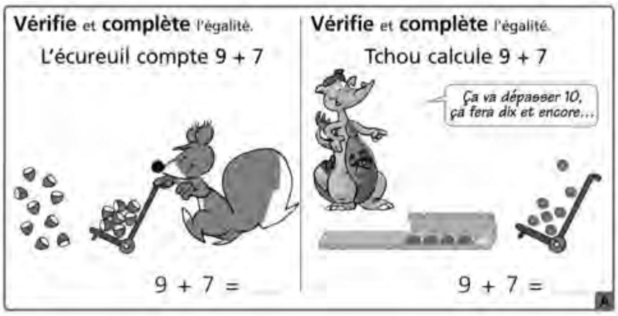
La comparaison entre le comptage et le calcul sur les objets

Considérons la leçon (page 94) où l'on compare le comptage et la stratégie du « retour au cinq » :



À gauche, l'écureuil est obligé soit de recompter l'ensemble des noisettes une à une, soit de « surcompter au-dessus de 7 » en ne comptant plus les noisettes qui sont à l'extérieur du chariot. À droite, en revanche, il suffit d'imaginer que chacun des groupes de 5 jetons permet de remplir un compartiment d'une boîte de Tchou pour être amené à penser 7 + 5 sous la forme 5 + 5 + 2 (on remarquera l'analogie entre cette procédure et celle qui est employée par certains enfants sud-coréens, décrite page 16).

Considérons maintenant la première leçon (séquence page 107) où l'on enseigne le « passage de la dizaine »[15].

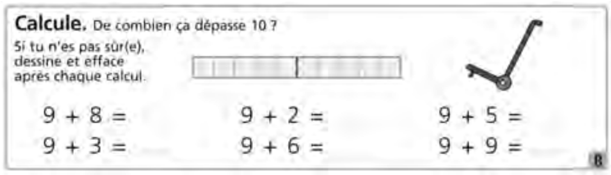


Là encore, à gauche, il faut soit recompter le tout, soit surcompter, alors qu'à droite il suffit d'imaginer qu'on prélève un jeton dans le chariot pour le mettre dans la boîte : on obtient alors une boîte pleine (c'est-à-dire dix ou une dizaine) et la disposition des jetons dans le chariot permet de voir immédiatement qu'il restera 6 jetons à ajouter. On est donc conduit à penser 9 + 7 sous la forme (9 + 1) + 6.

Ainsi, la comparaison entre les deux sortes de stratégies (comptage/calcul) est un élément fondamental de la progression. Au-delà de 5 objets, calculer avec ces objets, c'est les avoir organisés à l'aide des groupements de 5 et 10, et utiliser cette organisation pour trouver le résultat. L'opposition entre comptage et calcul est donc aussi une opposition entre organisation et inorganisation. Pour accéder ensuite au calcul mental, il est essentiel que les enfants prennent conscience de l'intérêt de penser les collections sous forme organisée plutôt qu'inorganisée et utilisent les décompositions correspondantes.

La mentalisation du calcul sur les objets : vers le calcul mental

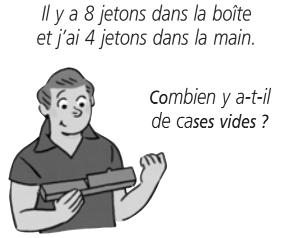
Une première activité favorisant la mentalisation du calcul sur les objets est celle où les élèves disposent du cadre imagé de la boîte mais où ils sont invités à ne pas dessiner les jetons dans la mesure du possible (l'activité ci-dessous est proposée lors de la séquence page 107, immédiatement après celle de comparaison entre le comptage et le calcul).



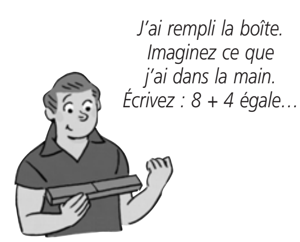
15. Le « retour aux cinq » et le « passage de la dizaine » sont les deux procédures où l'opposition entre le comptage d'objets et le calcul sur des objets est la plus claire, mais des leçons sont faites avant celle-ci, tôt dans l'année, où l'on enseigne le calcul de sommes inférieures ou égales à 10 en utilisant soit un « passage du cinq » (4 + 3 = 4 + 1 + 2), soit un « retour au cinq » avec de plus petits nombres (6 + 3 = 5 + 1 + 3).

Remarquons que la présence du cadre imagé de la boîte est une aide, même dans les cas où les élèves ne dessinent pas. Ils peuvent en effet imaginer les jetons dans la boîte et la case vide, ce qui aide à la décomposition du deuxième nombre.

Pour aider les enfants à se passer du dessin et à accéder au calcul mental, nous utilisons fréquemment, dans cette édition de *J'apprends les maths CP*, une technique pédagogique qui était déjà présente dans l'édition 2002, mais de manière moins systématique : les élèves sont invités à **simuler mentalement un ajout que l'enseignant réalise de façon masquée**. C'est l'une des situations-problèmes d'anticipation présentées au chapitre 1. Considérons par exemple la situation utilisée pour enseigner le « passage de la dizaine » : 8 + 4 = (8 + 2) + 2 :



Phase d'anticipation (début).



Phase d'anticipation (fin).

Les élèves sont conduits à simuler mentalement l'action que l'enseignant a réalisée de façon masquée. Or les recherches en neuropsychologie[16] montrent que l'apprentissage repose grandement sur ce type de processus mentaux. Au-delà des travaux scientifiques, on en comprend bien les raisons en considérant la phase de validation :

Phase de validation : l'enseignant reconstitue la situation initiale tout en basculant la boîte et en ouvrant la main. Il peut ensuite réaliser l'action de manière visible.

Lorsque les élèves sont seulement confrontés à une situation comme celle qui est utilisée ici pour la validation, c'est-à-dire une situation où le complément à 8 est visible, où la collection ajoutée est visible et donc facilement décomposable, la plupart d'entre eux se trouvent en grande difficulté dès que le matériel n'est plus présent.

Simuler mentalement l'action que l'enseignant a réalisée de manière masquée oblige à reconstituer mentalement les données correspondant aux différentes étapes de la procédure et à enchaîner ces étapes : devenir capable de le faire rend autonome dans la mise en œuvre de cette procédure.

On comprend donc comment les enfants apprennent à reconstruire mentalement le résultat de 8 + 4, par exemple. Mais comment arrivent-ils, à terme, à connaître ces résultats « par cœur » ?

16. Rizzolatti G. & Sinigaglia C. (2008) *Les neurones miroirs*. Paris : Odile Jacob.

La mémorisation du répertoire additif

L'organisation des nombres en mémoire

Essayons tout d'abord de décrire comment les nombres sont organisés dans la mémoire d'un adulte.

Ces nombres sont organisés selon l'ordre numérique, bien entendu, mais pas seulement. Pour s'en convaincre, il suffit de se livrer à une petite simulation en comptant avec les lettres de l'alphabet, c'est-à-dire un système verbal inhabituel. En effet, on est capable de construire une collection de « L » jetons, en comptant A, B, C…, jusqu'à L. Lorsqu'on accepte cette règle du jeu, il est donc possible de se mettre d'accord sur ce qu'est un nombre de « L jetons ». Mais on n'a pas une bonne conception de la quantité correspondante. Que nous manque-t-il ? Il nous manque tout un ensemble de relations qui sont connues avec les désignations habituelles, avec 12 par exemple (c'est le nombre qui correspond à L), mais qui sont inaccessibles directement lorsqu'on remplace la suite des mots-nombres par la suite des lettres de l'alphabet : on ne sait pas que L, c'est F + F (alors que 12 = 6 + 6), que L, c'est J + B (alors que 12 = 10 + 2)… et cela en se limitant aux relations additives, parce qu'on pourrait parler de notre ignorance des relations multiplicatives L = D x C (12 = 4 x 3), etc.

Pour prendre une image, si quelqu'un est seulement capable de se représenter l'ordre sur les nombres, c'est-à-dire s'il est avec les nombres comme nous sommes avec les lettres, sa mémoire est analogue à une corde à nœuds : à partir de n'importe quel nœud (L), seul le nœud qui est immédiatement après (M) et celui qui est immédiatement avant (K) sont assez facilement mis en relation avec le nœud de départ (K + A = L et L + A = M). Notre mémoire des nombres n'est pas organisée ainsi, elle ressemble plus à un réseau ferroviaire où chaque nombre est assez directement mis en relation avec tous les autres.

Précisons la structure de ce réseau : certaines relations numériques sont mieux connues que d'autres (dans l'image du réseau ferroviaire, les nombres qui appartiennent à de nombreuses relations bien connues sont des nœuds du réseau). Quand une relation est mieux connue, le temps nécessaire pour retrouver le résultat est plus court. Pour 8 par exemple, les relations 4 + 4 = 8 et 5 + 3 = 8 sont plus rapidement retrouvées que 2 + 6 = 8. Plus généralement, deux sortes de relation concernant les nombres inférieurs à 10 sont mieux connues que les autres : les doubles et celles qui contiennent 5[17].

Au-delà de 10, les doubles restent les relations additives les mieux connues, mais il faut y ajouter les décompositions qui utilisent 10 (16 = 10 + 6). Le réseau des relations numériques n'est donc pas homogène, il vaut mieux se le représenter comme un réseau comportant des centres, et parmi les centres principaux : 2 (pour les doubles), 5 et 10.

Les mécanismes de mémorisation

Ce n'est pas pour les mêmes raisons que les doubles et les relations qui utilisent 5 ou 10 sont bien mémorisées. Il faut en effet distinguer deux mécanismes différents de mémorisation.

Concernant les doubles, les phrases du type « deux plus deux, quatre », « trois plus trois, six » sont faciles à mémoriser « par cœur » parce qu'elles sont répétitives. Le fait qu'elles contiennent deux fois le même mot favorise l'association verbale. On remarquera d'ailleurs que certains jeunes enfants connaissent ces phrases « par cœur » alors qu'ils n'en comprennent pas la signification. C'est ainsi que parfois, pour les doubles, la mémorisation précède la compréhension.

La situation est différente pour les relations numériques qui utilisent 5 et 10 : on ne retrouve pas cette répétition d'un mot qui favorise l'apprentissage par cœur. Utilisons à nouveau la simulation avec les lettres pour comprendre comment se mémorisent ces relations numériques qui comportent 5 ou 10.

En effet, pour connaître la quantité correspondant à une lettre donnée, pour savoir « combien c'est "H" ? », par exemple, la plupart des gens comptent un à un sur leurs doigts le nombre correspondant jusqu'à produire une configuration de doigts correspondant à « H ». Quand le système verbal (ici les lettres) nous renseigne insuffisamment sur la quantité, c'est notre système gestuel, structuré autour de 5 et 10, qui devient la référence. L'adulte qui compterait souvent « H » sur ses doigts mémoriserait assez rapidement que « E » correspond à une main et que « H » correspond à une main et 3 doigts et il saurait interpréter son comptage en termes de calcul dans son nouveau système langagier (« H = E + C »). Il est vraisemblable que les enfants mémorisent ces relations de la même manière. C'est en comptant des éléments qui sont pris dans un cadre structuré (les doigts dans le cadre des deux mains, les jetons dans la boîte de Tchou, les points ou les balles quand ils sont disposés comme Dédé) et en interprétant le résultat de ce comptage en termes de calcul que l'enfant mémorise les relations de la forme 5 + *n*.

Les relations de la forme 10 + *n* ne se mémorisent pas toutes de manière identique. En effet, la mémorisation de 17 = 10 + 7 est considérablement facilitée du fait que 17 se dit « dix-sept ». Pour 18 et 19, c'est également le cas. Mais 11 ne se dit pas « dix-un », 12 ne se dit pas « dix-deux »… Aussi, jusqu'à 16, la mémorisation des relations de la forme 10 + *n* se fait-elle de manière similaire à celle des relations de la forme 5 + *n*. L'enfant qui vient d'achever un comptage jusqu'à 13 sur ses doigts n'a plus que 3 doigts sortis à la fin de son comptage. Il peut interpréter les 13 doigts comptés comme la somme des 10 premiers doigts et des 3 doigts qu'il voit. C'est, là encore, le

17. Les rôles privilégiés des doubles et de 5 sont observés chez de très jeunes enfants : voir par exemple les données de Siegler et Robinson (1982) (*cf.* référence plus haut) avec des enfants de GS ou, avec des enfants de CP, Groen et Parkman, 1972, A chronometric analysis of simple addition, *Psychological Review,* 79, pp. 329-343.

comptage à l'intérieur d'un cadre structuré et l'interprétation de ce comptage en termes de calcul qui conduisent à mémoriser la relation correspondante (*cf.* séquences 44, 50 et 71).

Nous avons expliqué la mémorisation des doubles, celle des relations de la forme 5 + *n*, 10 + *n*. Qu'en est-il des autres relations ? Les chercheurs ne sont pas tous d'accord sur ce sujet. Plusieurs théories s'affrontent. Pour certains, le résultat de « neuf plus sept » serait mémorisé par association verbale, selon le mécanisme invoqué pour expliquer la mémorisation des doubles. Bien sûr, dans le cas de « neuf plus sept », il n'y a pas répétition d'un terme, aussi la mémorisation est-elle plus tardive que celle d'un double et le temps nécessaire pour retrouver le résultat en mémoire est-il plus long, mais le processus de mémorisation comme le mode de stockage seraient, selon cette position, de même nature dans les deux cas.

Selon une autre position, qui a notre faveur, c'est en se ramenant aux relations connues précocement (doubles, 5 + *n*, 10 + *n*) que l'enfant mémorise les autres relations et c'est parce que ces stratégies de calcul mental s'automatisent que l'adulte arrive à connaître « par cœur » le répertoire additif. Pour déterminer 9 + 7, l'adulte fait en quelque sorte un « passage de la dizaine fulgurant ». La mémorisation de ces relations numériques ne précède donc pas leur compréhension, contrairement à ce qui se passe souvent avec les doubles. Dans ce cas c'est plutôt la compréhension qui est ici la source même de la mémorisation[18].

Les relations du type 5 + *n*, 10 + *n,* ou encore les doubles, sont donc selon nous essentielles, car elles servent de point d'appui pour mémoriser toutes les autres. C'est pourquoi nous avons accordé beaucoup d'importance, dans ce fichier, au comptage d'éléments à l'intérieur d'un cadre structuré (la boîte de Tchou, les nombres « comme Dédé ») et à l'interprétation de ce comptage en termes de calcul (chaque nouveau mot-nombre prononcé correspond à l'ajout d'une unité), pour que les enfants construisent les repères privilégiés 5 et 10.

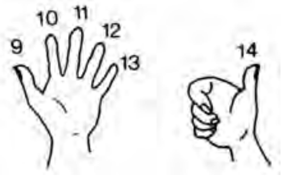
On comprend mieux aussi que nous ayons choisi d'enseigner les diverses stratégies de calcul : le « passage du cinq », le « passage de la dizaine », le « retour aux cinq ». Enseigner ces diverses stratégies, ce n'est pas seulement permettre aux enfants d'obtenir le résultat exact, car le comptage, de ce point de vue, conviendrait tout aussi bien : il conduit lui aussi au résultat exact. Enseigner ces stratégies de calcul, c'est faire reconstruire les résultats en prenant appui sur les repères 5 et 10, c'est faire reconstruire les résultats sous une forme qui favorise leur mémorisation. C'est aider l'enfant à construire son réseau de relations numériques, pour qu'il ne soit plus avec les nombres comme nous sommes avec les lettres.

18. Les tables de multiplication ne se mémorisent généralement pas comme les « tables d'addition »; le processus de mémorisation y est voisin de celui des doubles, même s'il est plus long. Sur toutes ces questions, l'ouvrage de référence est : Fischer J.-P,. 1992, *Connaissances procédurales et déclaratives dans des apprentissages numériques élémentaires,* Nancy, Presses universitaires.

Il faut se méfier d'un enseignement systématique du surcomptage

Certains pédagogues préconisent un enseignement systématique du surcomptage. Pour 8 + 6 par

Huit,



exemple, l'enfant doit mettre « 8 dans la tête », « 6 sur ses doigts » et procéder ainsi :

Nous voudrions mettre en garde contre un tel enseignement, qui peut se révéler un véritable « piège pédagogique ». Là encore, l'usage des lettres de l'alphabet, plutôt que des chiffres ou des mots-nombres, est instructif. Nous avons vu que, lorsqu'on dispose seulement d'une suite de mots ou de lettres qu'on sait réciter dans l'ordre, on n'a pas une bonne conception des quantités, parce que celle-ci nécessite la construction de tout un réseau de relations numériques. Et pourtant, de manière surprenante, on reste parfaitement capable de faire des additions en surcomptant. S'il s'agit de calculer « I + E », par exemple, je mets

« **I** »,

« I dans la tête » et « E sur les doigts » (c'est une main) et j'égrène :

« I + E » est donc égal à « N ». La situation semble paradoxale : on n'a pas l'impression de bien concevoir les quantités « I » et « N » et, pourtant, on est capable d'énoncer que « I + E = N ».

Ce paradoxe se dissipe lorsqu'on observe que le surcomptage n'accorde aucun rôle privilégié au nombre 10[19] et qu'on se rappelle qu'il n'y a pas de bonne conception des quantités sans ce repère 10. Que « I » ait été avant 10, après 10 ou même qu'il ait été égal à 10, cela n'a aucune espèce d'importance. On procède de la même façon dans tous les cas. On pourrait objecter que, lorsqu'on surcompte au-dessus d'un nombre plus grand que 10, il faut bien mettre ce nombre (et donc 10) « dans la tête ». L'objection ne tient pas : pour amorcer le surcomptage après « I », il suffit de savoir repérer ce mot dans une suite verbale ; il n'est pas nécessaire de savoir évoquer la quantité correspondante, sous forme d'image mentale par exemple. L'expression « dans la tête » est leurrante car elle laisse penser qu'il y a eu mentalisation, alors que pour réussir il suffit de savoir réciter la suite des lettres à partir d'un repère donné, ce qui peut résulter d'un simple entraînement. Souvent, il s'agit d'une pseudo-mentalisation.

19. Lorsqu'on détermine 9 + 7 par surcomptage, on a intérêt à savoir représenter 7 directement sur les doigts et donc à utiliser le repère 5. En revanche, le surcomptage ne nécessite jamais l'usage du repère 10.

Présentation

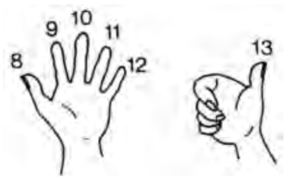
Alors que les stratégies de calcul réfléchi prennent appui sur les repères 5 et 10, et conduisent l'enfant à trouver les résultats sous une forme qui favorise leur mémorisation et donc, à terme, la construction de tout un réseau de relations numériques, le surcomptage n'utilise que la récitation des nombres dans l'ordre : seules les relations de voisinage, celles qui correspondent à l'ajout d'une ou deux unités (7 + 1 = 8, 7 + 2 = 9, par exemple), seront mémorisées.

C'est ainsi que l'enseignement systématique du surcomptage peut fonctionner comme un véritable « piège pédagogique ». S'il fallait, en effet, définir l'expression « piège pédagogique » pour un dictionnaire pédagogique, nous proposerions volontiers l'article suivant :

> *Piège pédagogique : procédé qui conduit à la réponse attendue, qui permet donc d'« avoir tout bon », sans pour autant avoir développé une conception riche du matériau sur lequel on travaille.*

Il y a danger, parce que l'élève produit les réponses attendues et offre ainsi à l'enseignant l'apparence du savoir. L'enseignant poursuit sa tâche sans s'apercevoir qu'il construit sur du sable : une conception des nombres structurée par la seule récitation de la suite verbale. L'enfant, d'ailleurs, s'offre à lui-même les apparences du savoir puisqu'il ne prend pas conscience des limites de ses conceptions numériques.

On sait aujourd'hui que cette analyse n'est pas une simple spéculation théorique : de nombreux résultats[20] attestent que les enfants en échec persistant dans leurs apprentissages numériques sont, pour la plupart, des enfants prisonniers du comptage un à un. À 12 ans, ces enfants n'ont toujours pas mémorisé les résultats du répertoire additif, ils sont toujours obligés de reconstruire ces résultats par le surcomptage. Souvent, même, ils se trompent d'une unité, ils écrivent 8 + 6 = 13 parce qu'ils ont mal amorcé leur surcomptage :



C'est pourquoi les seuls surcomptages qui sont enseignés dans la progression adoptée sont les surcomptages au-dessus des repères privilégiés 5, 10, 20, 30…, et encore avec précaution. Ainsi, pour que les enfants construisent 5 comme repère privilégié, on les amène à compter des jetons dans la boîte de Tchou. Si, par exemple, il y a 7 jetons dans la boîte, les enfants sont souvent amenés à surcompter : « cinq sous le couvercle, 6, 7 ». Lorsque l'enfant prononce le mot « cinq » dans ce cas, il ne s'agit pas d'un simple rituel « Je mets X dans la tête » qu'on met en œuvre quel que soit le nombre. Le mot « cinq », plus probablement, renvoie alors à la quantité des 5 jetons que l'enfant ne voit plus, mais qui sont présents sous le couvercle. Très souvent, quand les enfants surcomptent ainsi, ils parcourent du doigt le couvercle. Cette observation témoigne que, lorsque l'enfant prononce le mot « cinq », il s'agit d'une authentique mentalisation ; l'enfant n'a pas fait que se positionner dans la suite verbale, avant de réciter les mots-nombres suivants. Quand l'enfant dit « cinq sous le couvercle, 6, 7 », ces « cinq » sont plus réellement « dans sa tête » que lorsqu'on cherche à les y mettre trop rapidement.

Et dans tous les cas, lorsque l'enfant surcompte, le cadre imagé (boîte de Tchou…) permet d'interpréter son surcomptage en termes de calcul : « 5 sous le couvercle et ces 2 là, ça fait 7 », dans l'exemple précédent. Des activités analogues sont conduites pour construire les repères 10, 20, 30…

Bien entendu, lorsqu'un enfant **découvre** le surcomptage dans sa généralité, c'est-à-dire au-dessus de 4, de 8, de 15, etc., l'enseignant peut se réjouir d'un tel progrès, mais il n'enseigne pas cette procédure dans laquelle certains enfants s'enfermeraient. Avec des procédures comme le « passage de la dizaine » ou le « retour aux cinq » (le « calcul réfléchi »), l'enseignant peut avoir une attitude assez volontariste car leur enseignement est sans danger pour l'enfant. Avec d'autres procédures comme le surcomptage, une plus grande réserve doit être adoptée : il vaut mieux proposer régulièrement des situations-problèmes pour que les enfants inventent ces procédures, au moment où ils le peuvent, car c'est le gage qu'ils en ont une maîtrise conceptuelle suffisante, qu'elles ne vont pas conduire à des réussites plus dangereuses que certains échecs.

Résumé

Ce n'est pas **à force de compter** que les enfants apprennent à calculer. Certains enfants peuvent même s'enfermer très longtemps dans le comptage un à un. L'apprentissage du comptage est incontournable mais il ne suffit pas.

Ce n'est pas non plus **à force de répéter** les résultats des additions (ce qu'on appelle l'« apprentissage par cœur ») que les enfants apprennent à calculer.

Nous avons choisi de favoriser un autre mode d'apprentissage où l'enfant apprend d'abord à représenter les quantités à l'aide des **repères 5 et 10.** Il utilise ensuite des stratégies de **« calcul réfléchi »** telles que le « passage de la dizaine » (9 + 7 = 9 + 1 + 6) et le « retour au cinq » (8 + 5 = 5 + 3 + 5), en réalisant d'abord les actions correspondantes avec des collections organisées (c'est le calcul sur des objets), puis en simulant mentalement ces mêmes actions.

20. Voir notamment :
- Allardice B.S. & Ginsburg H.P., 1983, Children's psychological difficulties in mathematics, *in* H.P. Ginsburg (Ed), *The Development of mathematical thinking,* New York, Academic Press.
- Geary D.C., 2005, Les troubles d'apprentissage en arithmétique : rôle de la mémoire de travail et des connaissances conceptuelles *in* M. P. Noël (Ed), *La dyscalculie*, Marseille, Solal, pp. 169-192.

Chapitre 3

LA SOUSTRACTION DANS LA VERSION *TCHOU* DE *J'APPRENDS LES MATHS CP*

Quelle que soit sa version (*Picbille* ou *Tchou*), l'un des principaux choix pédagogiques de la nouvelle édition de *J'apprends les maths CP* est le suivant : dès ce niveau de la scolarité, les élèves apprennent que la soustraction permet de résoudre d'autres problèmes que ceux où l'on cherche le résultat d'un retrait (ce thème a déjà été abordé dans le chapitre 1).

Dans la version *Picbille* de *J'apprends les maths CP*, en début d'année, les élèves rencontrent le signe « – » dans une situation de retrait et c'est dans un deuxième temps seulement qu'ils apprennent que la soustraction permet également de comparer deux collections. Dans la version *Tchou,* cette découverte est plus directe : dès la première rencontre des élèves avec le signe « – », celui-ci est associé à la résolution d'un problème de comparaison. Dans ce chapitre, les raisons de ce choix sont exposées ainsi que les principales étapes de la progression adoptée.

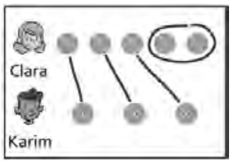
Plan du chapitre

Soustraire, ce n'est pas seulement chercher ce qui reste par une stratégie où l'on recule sur la suite des nombres

Dès l'école maternelle, les élèves ont appris à déterminer le résultat d'un retrait dans des cas simples : « On a 4 objets et on en retire 1. Combien en reste-t-il ? », par exemple. Mais à ce moment de leur scolarité, il s'agit d'une connaissance informelle et nous allons voir qu'à strictement parler, cette connaissance n'est pas encore celle de l'opération arithmétique qu'est la soustraction.
Quand peut-on dire que les élèves commencent l'apprentissage de la soustraction ? Pour répondre à cette question, il convient de remarquer que cette opération arithmétique ne se réduit pas au geste quotidien de retrait parce qu'elle permet de résoudre des problèmes qui, *a priori*, n'ont rien de commun avec un retrait : les problèmes de comparaison (combien de plus ?).

La soustraction permet de résoudre des problèmes de comparaison

Considérons le problème suivant : « Clara a 5 CD et Karim a 3 CD. Combien Clara a-t-elle de CD de plus que Karim ? » Un adulte sait que la solution de ce problème s'obtient en calculant la soustraction 5 – 3, mais comment un enfant pourrait-il le savoir ? La situation est *a priori* très différente d'une autre où l'on retire 3 unités à une collection de 5. En fait, il est possible de comprendre le lien entre la comparaison et la soustraction en changeant de point de vue sur la situation de comparaison grâce à la figure ci-dessous.



Il suffit en effet d'imaginer d'abord une mise en correspondance terme à terme de ce que Clara et Karim ont « de pareil » puis le retrait de ce qui vient d'être mis en correspondance terme à terme : le résultat de la comparaison correspond à ce qui reste à Clara quand on lui retire ce qui, dans sa collection, est « pareil que Karim ». Cette situation permet d'ailleurs de bien comprendre pourquoi le résultat d'une soustraction s'appelle une *différence* : cette opération permet de calculer ce qui est différent lorsqu'on a retiré « ce qui est pareil ».

Un choix pédagogique fondamental : introduire le signe « – » dans une situation de comparaison

Comme nous venons de le voir, en changeant de point de vue sur une situation de comparaison, il est possible de faire le lien entre celle-ci et une situation de retrait. Ainsi, en définissant d'emblée avec les élèves le signe « – » comme le signe opératoire qui permet de résoudre des problèmes de comparaison, il est donc possible de les amener à effectuer des retraits afin de trouver le résultat de ces comparaisons et, donc, à comprendre que cette opération permet à la fois de résoudre les problèmes de comparaison et de retrait.

Mais pourquoi ne pas faire l'inverse : pourquoi ne pas introduire le signe « – » dans une situation de retrait pour, dans un deuxième temps, découvrir que la comparaison peut résulter du retrait de ce qui est pareil et, donc, d'une soustraction ?

Deux arguments plaident en faveur du choix retenu dans la version *Tchou* de *J'apprends les maths CP* :

• La situation de comparaison est plus générale que celle de retrait. En effet, la recherche d'un reste correspond à une comparaison particulière : dans une situation de retrait, il y a une grande collection (la collection initiale), une petite collection (celle qui correspond au geste de retrait) et la comparaison de ces 2 collections permet de connaître ce qui subsiste de la collection initiale au-delà de ce qui est retiré. Or, en pédagogie, il convient le plus souvent de définir les notions au niveau le plus général possible, il convient de se méfier de l'enseignement dans des cas trop particuliers.
Quelle que soit la discipline, en effet, un enseignement sur une longue durée de cas trop particuliers a des effets délétères sur les élèves les plus fragiles. Dans le domaine de l'écrit, par exemple, l'enseignant de CP qui ne propose longtemps à ses élèves que des phrases où la correspondance grapho-phonologique est régulière (*Rémi a la pipe de papa*) n'aide pas les plus fragiles d'entre eux à comprendre que l'orthographe française n'a pas cette propriété et que pour lire et écrire en français, on ne peut généralement pas se contenter de « faire sonner les lettres ». De même, il convient que les élèves les plus fragiles ne s'enferment pas dans l'idée que la soustraction permettrait seulement de traiter les problèmes qui parlent d'une quantité qui diminue.

• La première rencontre avec les symboles arithmétiques est une sorte d'évènement dans la vie d'un écolier. C'est seulement le jour où l'enseignant enseigne l'usage du signe « – » que ceux-ci ont conscience de commencer à apprendre la soustraction. Souvent, l'enfant rentre chez lui en disant : « Aujourd'hui, j'ai appris la soustraction à l'école. » Il convient, ce jour-là, de privilégier une signification de ce symbole qui favorise les progrès futurs, c'est-à-dire une signification qui ne soit pas la signification banale que les enfants apprendraient même s'ils n'allaient pas à l'école. Lors de la première rencontre à l'école avec le signe « – », il est dommage de se contenter de dire aux élèves qu'on utilise ce signe quand on retire et quand on cherche ce qui reste. Mieux vaut viser d'emblée à installer l'idée que la soustraction, c'est la recherche de ce qui est différent lorsqu'on a relié dans sa tête ce qui est pareil.

Une soustraction peut se calculer « en reculant », mais aussi en « en avançant »

Un adulte ne calcule pas mentalement 104 – 6 comme il calcule 104 – 98. Dans le cas de 104 – 6, il procède par retraits successifs (104 – 4) – 2, c'est-à-dire en « reculant ». Et dans le cas de 104 – 98, il procède par recherche du complément, en « avançant » : « 98 pour aller à 100, il faut 2, et pour aller à 104, 4 ; 2 et 4, 6 ». Et pourtant, dans les deux cas, il s'agit de déterminer $a – b$, c'est-à-dire le résultat d'un retrait.
D'une manière générale, quand on retire peu, on a intérêt à faire des retraits successifs, et, quand on retire beaucoup, à procéder par compléments successifs.

Il est important que les enseignants sachent que l'un des enjeux fondamentaux de l'enseignement de la soustraction à l'école est de permettre l'accès au calcul réfléchi du résultat d'un retrait. En effet, lorsqu'on ne leur enseigne pas les deux sortes de stratégies, les jeunes enfants n'y accèdent pas spontanément de manière précoce. Savoir calculer de manière réfléchie le résultat d'un retrait, c'est savoir que, selon les valeurs numériques, il vaut mieux adopter une procédure « en avançant » ou « en reculant ». Or, les seules procédures que les enfants découvrent spontanément sont celles où ils « reculent » sur la suite des nombres. Ainsi, les élèves de CE1 déterminent le plus souvent 9 – 6 par un comptage à rebours : 9, 8 (1 objet a été retiré), 7 (2), 6 (3), 5 (4), 4 (5), <u>3</u> (6). Avec les mêmes nombres, un comptage en avançant aurait été plus économique : 6, 7 (1 a été ajouté), 8 (2), 9 (<u>3</u>). Cependant, lorsque les stratégies de calcul d'une soustraction « en avançant » ne leur sont pas enseignées, les élèves ne les découvrent que très tardivement.

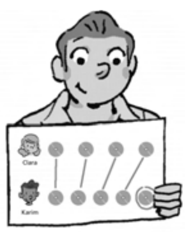
L'explication d'un tel phénomène est simple : les enfants ont appris très jeunes à avancer sur la suite numérique, ils l'ont appris au moment où on leur enseignait à compter des objets. Or, les situations correspondantes étaient toutes des situations de cumul d'objets. Pour les jeunes enfants, le comptage en avançant a ainsi été précocement associé aux situations où une quantité d'objets croît. On comprend qu'au CP, et pour certains élèves au CE1 encore, il y ait une sorte de contradiction entre le fait d'avancer sur la suite des nombres et celui de chercher le résultat d'un retrait parce que cette action fait décroître les quantités. Avec la version *Tchou* de *J'apprends les maths CP*, les élèves risquent moins ce phénomène pour deux raisons : d'une part, la soustraction n'est pas étroitement associée aux situations où une quantité décroît ; d'autre part, le calcul réfléchi d'une soustraction, et notamment les stratégies qui conduisent à un calcul « en avançant », sont enseignées dès ce niveau de la scolarité.

Les principales étapes du début de la progression

Proposer des problèmes de comparaison dès le début de l'année

• En début d'année (à partir de la séquence page 34), nous avons choisi de proposer des problèmes de comparaison, sans faire de connection avec l'idée de soustraction ni utiliser le mot « différence ». L'objectif est que les élèves apprennent à mettre en œuvre le geste mental de la correspondance terme à terme pour comparer des collections et qu'ils s'approprient le vocabulaire « de plus », « de moins » et « autant ». En effet, il est clair qu'ultérieurement les élèves feront d'autant mieux la connection entre la comparaison et la soustraction qu'ils auront de bonnes compétences dans la résolution des problèmes de comparaison.

C'est pour cela que dès le début de l'année, l'enseignant propose aux élèves l'activité de comparaison qui a déjà été décrite au chapitre 1 (page 6 de ce *Livre du maître*) : « *Qui a le plus de CD, Clara ou Karim ?* » Dans cette activité, les collections ne sont visibles que par le maître, ce qui favorise la simulation mentale de la correspondance terme à terme. C'est seulement lors de la validation que la correspondance terme à terme est effectivement réalisée et que ce que Karim a en plus (dans l'exemple ci-dessous) est entouré.

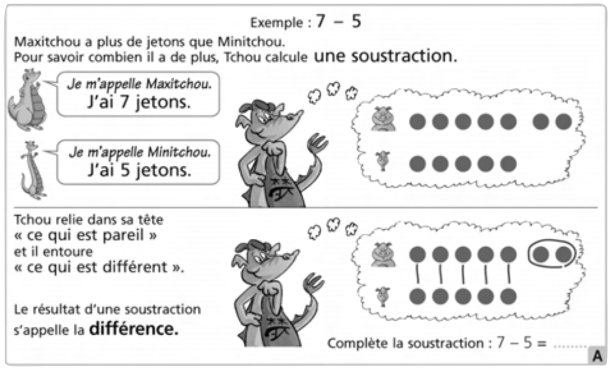


On a donc choisi de favoriser la mentalisation de la comparaison par correspondance terme à terme avant de faire le lien entre la comparaison et la soustraction.

Introduire le signe « – » dans une situation de comparaison

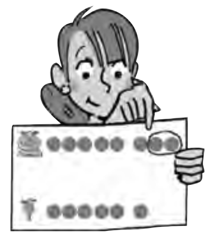
Le signe « – » et le mot « différence » sont introduits lors de la séquence de la page 55 folio élève, dans une situation de comparaison. Plutôt que d'utiliser le contexte des CD de Clara et de Karim, nous avons choisi d'introduire deux nouveaux personnages, Maxitchou et Minitchou. Le fait que Maxitchou ait systématiquement plus de jetons que Minitchou est en effet une aide pour comprendre que dans une soustraction, par convention, on écrit le grand nombre en premier.

Dès la séquence suivante, page 56 folio élève, les enfants apprennent à écrire des soustractions dans des contextes de comparaison différents de celui-ci (enfants qui comparent leurs nombres de billes, comparaison du nombre de filles et de garçons dans un jeu, etc.).



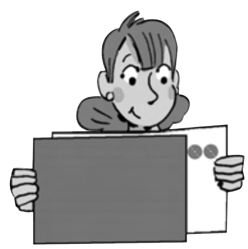
Ainsi, c'est lors de cette séance d'introduction du signe « – » que la signification commune du mot « différence » sert de point d'appui : la « différence », au sens mathématique, c'est ce qui reste quand on a retiré « ce qui est pareil » du grand nombre. Dans la séquence de la page 56 folio élève, cette signification est confortée du fait qu'on l'oppose à celle du mot « somme » : on se place dans des contextes où les nombres peuvent être additionnés (ce qui n'est pas le cas avec les âges, par exemple) et l'on interprète ce que sont la somme et la différence de deux nombres.

• Remarquons par ailleurs qu'il est plus facile de déterminer la différence de deux collections lorsque celles-ci sont organisées avec le repère 5 que lorsque ce n'est pas le cas. En effet, quand les collections sont organisées, il n'est pas indispensable de relier 1 à 1 ce qui est pareil pour « voir » la différence.

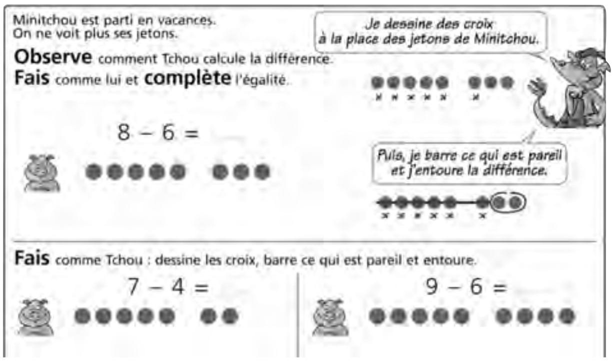


Faire le lien avec l'idée de retrait

• Une façon de faire le lien avec l'idée de retrait consiste à masquer ce qui est pareil avec un carton : la différence apparaît alors comme ce qui reste du nombre le plus grand lorsqu'on lui a retiré ce qui est pareil.



• Le lien entre la comparaison de 8 et 6 et la soustraction 8 – 6 serait plus évident encore si ce qui est pareil (6) était représenté une seule fois sur le carton. C'est la raison pour laquelle dans l'une des séances visant à faire le lien entre comparaison et



soustraction (séquence page 77), Tchou compare les jetons de Maxitchou et de Minitchou alors que ce dernier est en vacances : pour effectuer cette comparaison, il se contente d'évoquer mentalement les jetons de Minitchou plutôt que de les dessiner.

Les principaux choix concernant l'enseignement du calcul réfléchi

Un autre argument en faveur de l'enseignement du calcul réfléchi d'une soustraction

L'un des principaux arguments en faveur d'un tel choix est, selon nous, le suivant : la soustraction permet, mieux que l'addition, d'amener les enfants à mobiliser des images mentales des collections organisées comme Tchou et à construire ainsi une bonne représentation des quantités. C'est cette idée qui est développée ci-dessous.

Remarquons tout d'abord que, lorsque les enfants disposent d'objets pour mimer l'énoncé d'un problème, la recherche du résultat d'un retrait n'est pas plus difficile que la recherche du résultat d'un ajout ; les deux sortes de problèmes ont exactement le même taux de réussite en grande section et au CP. La recherche du résultat d'un retrait n'est plus difficile que lorsque les enfants ne disposent pas d'objets, ou encore lorsqu'on ne les autorise pas à sortir leurs doigts. Dans ce cas, en effet, la procédure la plus courante est le décomptage : pour 9 – 3, par exemple, l'enfant fait « *neuf… 8, 7, 6… six* ». Or le décomptage (comptage à rebours) est mal maîtrisé par les jeunes enfants, contrairement au comptage en avant, qui a souvent fait l'objet d'un entraînement intensif.

Ce qui peut apparaître comme une lacune (les enfants ne savent pas décompter) devient, pour le pédagogue qui souhaite privilégier le calcul mental, une situation particulièrement intéressante. En effet, on arrivera d'autant mieux à faire adopter aux enfants la stratégie alternative qui consiste à opérer sur des images mentales des quantités de la manière suivante :

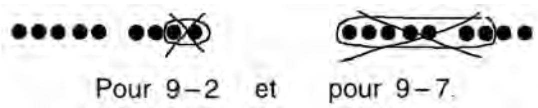
C'est ainsi que certains enfants accèdent au calcul mental grâce à la soustraction, alors même que, pour déterminer le résultat d'une addition, ils comptent toujours de 1 en 1. S'il s'agit, par exemple, de déterminer 6 + 3, ces enfants surcomptent (« *six…, 7, 8, 9* »), et ce malgré les leçons où l'on a cherché à leur faire utiliser le repère 5 (le comptage en avant est tellement entraîné qu'il est parfois « irrépressible »). Certains de ces enfants seraient incapables d'évoquer une image mentale des quantités 6 et 9 ; ils réussissent par une procédure entièrement verbale qui, nous l'avons vu au chapitre 2, ne conduit pas directement au calcul mental.

En revanche, pour déterminer 9 – 3, ces mêmes enfants adoptent facilement la stratégie de calcul mental qu'on leur enseigne.

L'enseignement de la soustraction est donc, au CP, un excellent moyen pédagogique au service de la représentation des quantités, un moyen qu'il faut saisir à ce moment de la scolarité. Si on n'enseigne la soustraction qu'au CE1, à ce moment les enfants **savent déjà compter à rebours** et c'est cette procédure que beaucoup d'élèves privilégient. Ils ne sont plus amenés à mobiliser des images mentales des collections organisées. Pour eux, l'enseignement de la soustraction vient trop tard comme moyen de favoriser le calcul mental.

Les deux stratégies de calcul réfléchi d'une soustraction au CP

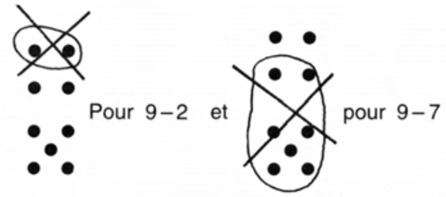
Dans le fichier, chaque stratégie est l'objet d'une leçon dans le domaine des 10 premiers nombres : on apprend d'abord à « retirer beaucoup » (pages 77-78), puis à « retirer peu » (pages 89 et 90). Les procédures enseignées sont évidemment différentes :



Il ne s'agit pas encore des stratégies de calcul réfléchi qui ont été explicitées au début de ce chapitre (retraits successifs et calcul par complément), mais ce calcul réfléchi est en germe dans les stratégies qui sont proposées aux enfants : dans l'une, on retire les « derniers points » dessinés, le calcul se fait donc en « reculant », alors que dans l'autre ce sont les « premiers points dessinés » qui sont retirés : il s'agit d'un calcul en « avançant ». C'est au CE1 seulement que les deux stratégies de calcul réfléchi seront explicitées en tant que telles. C'est intentionnellement qu'au CP on insiste sur des cas extrêmes (9 – 2 et 9 – 7) : ce sont ceux pour lesquels il est particulièrement intéressant d'utiliser ces stratégies et, rappelons-le, notre objectif principal est d'aider les enfants à la mentalisation d'un calcul.

Des leçons analogues sont menées dans le domaine des 20 premiers nombres (séquences pages 127-128 et 135-136 folios élève).

Remarque : dans l'édition 2002 de *J'apprends les maths CP avec Tchou*, les activités précédentes étaient menées avec des points dessinés « comme Dédé » plutôt que « comme Tchou ».



Cependant, les recherches concernant la façon dont les nombres sont représentés mentalement montrent qu'ils sont organisés selon une « file numérique mentale », orientée dans notre pays de gauche à droite (c'est-à-dire selon le sens de l'écriture), si bien qu'une soustraction comme 102 – 6 qui se calcule en barrant les nombres à la fin conduit à les barrer à droite, et une soustraction comme 102 – 94 qui se calcule en barrant les nombres au début conduit à les barrer à gauche. Le choix retenu dans cette nouvelle édition conduit donc à l'usage de stratégies qui sont plus proches de celles observées chez les « experts » en calcul.

La simulation mentale d'un retrait que le maître réalise de manière masquée

Dans cette nouvelle édition de *J'apprends les maths CP*, pour favoriser l'apprentissage du calcul réfléchi d'une soustraction, un nouveau procédé pédagogique est utilisé : la simulation mentale d'un retrait que le maître réalise de manière masquée. Donnons un exemple : tôt dans l'année, dès la séance de la page 45 folio élève, l'enseignant peut prendre un carton sur lequel 9 points sont dessinés comme Tchou, et le tenir de sorte que les élèves n'en voient que le verso :

J'ai pris un carton avec 9 points comme Tchou.
Imaginez ce que je vois.
Dessinez-le sur votre ardoise.

Un tel scénario est une aide importante à l'évocation mentale de configurations de points, car il est plus facile de reconstituer la vision d'autrui que de faire appel à son seul souvenir. Ce procédé pédagogique aide les élèves à s'approprier l'organisation des nombres entre 5 et 10 « comme Tchou ».

Plus tard, pour enseigner le calcul réfléchi de la soustraction 9 – 2, par exemple, l'enseignant commence par demander aux élèves d'imaginer les 9 points « comme Tchou », puis il prend un carton et se masque à lui-même les deux points les plus à gauche :

J'ai pris le carton sur lequel il y a 9 points.
Imaginez ce que je vois.
J'ai caché 2 points. Imaginez ce que je vois maintenant.
Ecrivez : 9 – 2, égale…

En effet, ce scénario ne favorise pas seulement l'évocation mentale de la collection organisée des points, il aide également à simuler mentalement les transformations qui affectent cette collection et, donc, à l'appropriation du calcul réfléchi d'une soustraction.

En cours d'année, cette activité est menée en sollicitant, suivant le calcul (retirer un petit nombre ou retirer « presque tout »), la mise en œuvre de l'une ou l'autre des deux grandes stratégies du calcul réfléchi d'une soustraction :

– S'il s'agit de calculer 9 – 2, par exemple, l'enseignant s'y prend comme ci-dessus.

– En revanche, pour aider au calcul de 9 – 7, il se masque à lui-même les 7 points de droite.

J'ai pris le carton sur lequel il y a 9 points.
Imaginez ce que je vois.
J'ai caché 7 points. Imaginez ce que je vois maintenant.
Ecrivez : 9 – 7, égale…

Comme toujours dans ce type d'activité, la vérification des résultats se fait en rejouant le même scénario de façon visible :

Remarques

1. Nous avons choisi de faire figurer dans le fichier de l'élève des images représentant un enseignant qui anime ce type d'activité. Ce choix a été le nôtre parce que le fichier de l'élève a aussi un **rôle de liaison avec**

les familles et parce qu'il est important que celles-ci prennent connaissance d'activités dont il est raisonnable de penser qu'elles jouent un rôle important dans le progrès des enfants.

Faut-il enseigner la technique en colonnes dès le CP ?

L'enseignement de la soustraction en colonnes fait partie des objectifs du cycle 2. Faut-il le commencer au CP ? Disons-le clairement : le choix pédagogique le pire consisterait à commencer cet enseignement dans le cas très particulier où il n'y a pas de retenue. Répétons-le encore une fois : l'enseignement précoce de savoir-faire complexes dans des cas trop particuliers crée de l'échec scolaire parce que certains élèves, ensuite, ne font jamais les généralisations nécessaires.

Il est bien connu que l'erreur la plus fréquente dans les soustractions en colonnes consiste à effectuer la soustraction dans n'importe quel ordre, de sorte que le phénomène de la retenue est systématiquement contourné (les élèves ont faux dès qu'il y en a une !). Pour 53 – 27, par exemple, l'enfant écrit :

$$\begin{array}{rr} 5 & 3 \\ -\,2 & 7 \\ \hline 3 & 4 \end{array}$$

Comment peut-on reprocher à un élève de faire ce type d'erreur si, pendant longtemps, on ne l'a confronté qu'à des cas où ce type de raisonnement conduit à la réussite ? Faut-il laisser croire aux élèves que le calcul d'une soustraction demande moins d'attention que celui d'une addition parce qu'il n'y a pas de retenue ? Au CE1 et dans les classes suivantes, certains élèves ne comprendront pas pourquoi le raisonnement qui les faisait réussir au CP les fait échouer maintenant.

Une question se pose alors : est-il raisonnable d'enseigner la soustraction en colonnes avec retenues dès le CP ? Même dans les pays anglo-saxons où la technique enseignée est plus simple que la technique française, cela n'est pas fait. Rappelons chacune de ces techniques. La technique anglo-saxonne pour le calcul de 53 – 27 consiste à « casser » une des 5 dizaines, de sorte qu'avec les 10 unités correspondantes on est conduit à calculer 13 – 7 :

$$\begin{array}{rr} 5 & 3 \\ -\,2 & 7 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} \overset{4}{\cancel{5}} & 13 \\ -\,2 & 7 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

La technique française, en revanche, se fonde sur l'égalité 53 – 27 = (53 + 10) – (27 + 10). Elle consiste à ajouter 10 dans les unités en haut (dans 53, il y avait 3 unités, il y en aura 13) et 10 dans les dizaines en bas (dans 27, il y avait 2 dizaines, il y en aura 2 + 1).

$$\begin{array}{rr} 5 & 3 \\ -\,2 & 7 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} 5 & 13 \\ -\,\underset{1}{2} & 7 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

La technique française se justifie du fait que la différence de deux nombres reste inchangée lorsqu'on ajoute le même nombre 10 à ces deux nombres. Cependant, d'une part, cette propriété est difficile à comprendre à cet âge, et, d'autre part, une difficulté supplémentaire résulte du fait que l'ajout de 10 n'est pas noté de la même manière en haut et en bas.

Faudrait-il donc enseigner la technique anglo-saxonne au CE1 ? Même cette technique est mal comprise à ce niveau de la scolarité. De plus, l'élève devra nécessairement en changer parce qu'elle conduit dans les divisions à barrer tellement de nombres que le calcul devient incontrôlable. Face à cet imbroglio, le choix de *J'apprends les maths* est dorénavant le suivant :

– La technique en colonnes n'est pas enseignée au CP (l'enseignant qui tiendrait absolument à le faire le fera sûrement dans le cas où il n'y a pas de retenue ; cela n'offre aucune difficulté ; les parents de ses élèves penseront que leurs enfants ont progressé, même si pour certains d'entre eux cet enseignement les a plus éloignés de la réussite qu'il ne les en a rapprochés).

– Comme le calcul mental est le passeport pour la réussite en mathématiques à l'école, dans *J'apprends les maths* le début du CE1 est consacré à l'apprentissage du calcul mental de soustractions simples sur les 100 premiers nombres.

– Les élèves apprennent ensuite la technique française : comme celle-ci se fonde sur une propriété de la différence, notion qui est travaillée dès le CP dans *J'apprends les maths*, de nombreux élèves comprennent cet enseignement. Mais, bien évidemment, tous ne le comprennent pas. Il convient cependant de ne pas exagérer l'inconvénient d'un tel enseignement : de nombreux élèves, avant 2008, n'apprenaient pas le calcul réfléchi d'une soustraction et on leur enseignait que soustraire signifie seulement enlever ou « reculer sur la file des nombres » ; la signification « comparaison » de la soustraction n'était abordée ni au CP, ni au CE1. Est-on sûr que cela n'avait pas encore plus d'inconvénients qu'un enseignement trop précoce de la technique de la soustraction en colonnes ?

Chapitre 4

ENSEIGNER UNE COMPTINE NUMÉRIQUE « À L'ASIATIQUE » AU CP

Dans ce chapitre 4, nous abordons un deuxième choix pédagogique de la version *Tchou* de *J'apprends les maths CP* qui est différent de celui fait dans la version *Picbille* : tôt dans l'année, les enfants apprennent deux comptines numériques, la comptine traditionnelle et une comptine régulière :

« un, deux, trois… huit, neuf, dix,
dix et un, dix et deux… dix et neuf, deux dix,
deux dix et un, deux dix et deux, deux dix et trois…
deux dix et neuf, trois dix,
trois dix et un, trois dix et deux…».

L'enjeu de ce choix n'est pas seulement une meilleure compréhension de la numération décimale, il est aussi de favoriser l'accès au calcul réfléchi des additions élémentaires quand le résultat est compris entre 10 et 20 et des soustractions élémentaires quand le nombre de départ est compris entre 10 et 20.

Seul le début de la progression concernant la numération décimale est différent dans les versions *Tchou* et *Picbille*. La lecture de ce chapitre ne fait donc pas double emploi avec celle du chapitre 5, qui aborde également l'apprentissage de la numération décimale mais qui, lui, est commun aux deux versions *Tchou* et *Picbille*.

Plan du chapitre

Pourquoi enseigner une suite verbale régulière ?

Les raisons d'un tel enseignement se justifient d'abord par les résultats des recherches interculturelles menées au début des années 90[1] : les élèves asiatiques comptent ainsi et ils comprennent bien mieux que leurs homologues occidentaux la numération décimale.

La supériorité des élèves asiatiques dans la compréhension de la numération

Diverses tâches testant la compréhension de la numération conduisent à de meilleures performances chez les enfants asiatiques. Dans une de ces tâches[1], l'expérimentateur dispose d'un matériel constitué à la fois de cubes unités et de barres de 10 cubes. Il a été vérifié que les élèves ne connaissent pas au préalable ce matériel et l'expérience commence en leur expliquant sa structure : chaque barre est formée avec 10 cubes. L'expérimentateur demande ensuite aux enfants de former avec ce matériel des collections de 28, 13, 30, 11 et 42 objets (le nombre est donné sous forme écrite chiffrée). On observe alors comment ils s'y prennent : comptent-ils tous les cubes 1 à 1 ou utilisent-ils les groupements de 10 matérialisés par les barres ? Si un enfant a compté 1 à 1, la tâche lui est proposée une seconde fois en lui demandant de trouver une autre manière de faire, pour qu'il puisse utiliser le groupement de 10 lors de ce second essai.

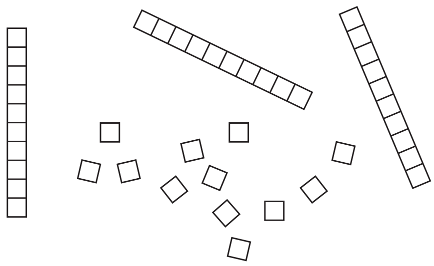
Vers la fin du CP, dans 31 % des cas, les enfants nord-américains utilisent le groupement de 10 au cours de l'un au moins des deux essais. Chez les enfants asiatiques (japonais et coréens), ce pourcentage est de 91 % !

On pourrait s'étonner de l'ampleur d'un tel écart. Mais il apparaît moins surprenant si l'on observe que :
1) « 42 » se lit « quatre dix deux » dans les langues asiatiques ;
2) dans ces langues, pour compter de 10 en 10, on dit : « *dix, deux dix, trois dix, quatre dix…* ».

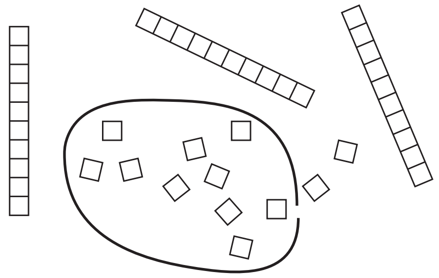
Pour un enfant asiatique, il est donc facile de comprendre que, pour former une collection de « *quatre dix deux* » cubes, il vaut mieux commencer par « compter des dix » (ici compter des barres de dix cubes) jusqu'à avoir « 4 dix cubes », que de compter directement les cubes 1 à 1.

Il convient cependant de se méfier d'un tel résultat car il se pourrait que les enfants asiatiques se « laissent porter » par cette régularité verbale et qu'ils ne réussissent que quand le matériel est structuré comme leur désignation des nombres. On peut se demander, par exemple, si les enfants chinois réussiraient aussi bien une tâche où l'expérimentateur présente le matériel suivant :

1. Les résultats qui suivent sont, pour l'essentiel, extraits de :
Miura I., Okamoto Y., Kim C., Steere M. & Fayol M., 1993. First graders'cognitive representation of number and understanding of place value : cross-national comparaisons, *Journal of Educational Psychology*, 85, 1, 24-30.



L'expérimentateur demande de compter pour savoir combien il y a de petits cubes en tout et d'écrire le nombre correspondant (il faut donc écrire 42). Il demande alors à l'enfant si le chiffre « 4 » et le chiffre « 2 » de « 42 » ont quelque chose à voir avec le matériel présenté. L'élève qui a compris la numération décimale regroupe 10 cubes et explicite que le chiffre « 4 » de « 42 » désigne les 4 groupes de dix correspondant aux 3 barres et au nouveau groupe formé.



On voit que, dans ce cas, il ne suffit plus d'apparier un mot (dix) et un élément matériel perçu (une barre) ; il faut concevoir la dizaine à la fois sous la forme de 10 cubes accolés pour former une barre et sous la forme de 10 unités séparées. Il faut être capable d'adopter un double point de vue sur « dix » : il faut le considérer à la fois comme une **« grande unité »** que l'on peut compter (« un dix, deux dix, etc. ») et comme **composé de « dix petites unités »** (dix cubes). Nous verrons au chapitre suivant que comprendre la numération décimale, c'est être capable d'adopter ce double point de vue.

Les enfants asiatiques réussissent-ils mieux cette tâche que les enfants occidentaux ? L'expérience a été menée[2] et le résultat est sans ambiguïté : cette tâche est réussie par 25 % d'élèves en fin de CP aux USA contre 46 % au Japon et 58 % en Corée. Même dans une tâche qui teste une compréhension approfondie de la numération, les enfants asiatiques surpassent donc largement les enfants occidentaux.

L'explication d'une telle supériorité semble aller de soi. Nous verrons en effet dans le chapitre 5 que, fondamentalement, la numération décimale se fonde dans un *changement d'unité de compte* : dès que la taille d'une collection est grande, il vaut mieux compter des ***cents*** ou des ***dix***, plutôt que de compter des ***uns***. Or, du fait de la régularité des comptines numériques asiatiques, **ce changement d'unité de compte est explicite dans ces langues**.

2. Miura *et al (ibid.).*

Est-on certain, cependant, que la supériorité des enfants asiatiques dans la compréhension de la numération décimale résulte *principalement* de cette régularité de leur comptine numérique ? D'autres causes, après tout, pourraient être évoquées : une plus grande ardeur au travail dans ces pays, une plus grande considération pour les apprentissages scolaires, etc.

Un argument décisif consisterait évidemment à montrer que, lorsque des enfants occidentaux apprennent une comptine numérique régulière en plus de celle de leur langue, ils comprennent mieux la numération décimale. L'idéal serait même de montrer qu'ils sont susceptibles d'atteindre le niveau de compréhension qui est celui des Asiatiques. Or, il existe une étude qui le montre.

La supériorité des élèves occidentaux qui apprennent une suite verbale régulière

Dans cette étude, Karen Fuson et ses collaborateurs[3] ont étudié l'effet d'un enseignement « bilingue » des nombres dans deux classes des quartiers défavorisés de Detroit, aux USA. Dans l'une de ces classes, l'enseignement se faisait en anglais et dans l'autre en espagnol ; dans les deux classes, les élèves apprenaient à dire les nombres dans leur langue maternelle mais aussi « à la chinoise », comme cela est fait dans *J'apprends les maths CP avec Tchou*. Concernant le nombre 53, par exemple, ils apprenaient à le dire « *five tens and three ones* » dans la classe anglophone et « *cinco dieces y tres unos* » dans la classe hispanophone.
En fin d'année, ces élèves avaient atteint un niveau de compréhension de la numération décimale proche et même parfois supérieur à celui qu'on observe chez les élèves asiatiques. Concernant la tâche qui teste une compréhension approfondie de la numération, par exemple, le tableau suivant permet de comparer les résultats obtenus en fin de CP par des enfants américains suivant un cursus normal, par des enfants japonais et coréens et par les élèves des deux classes de l'expérience de Fuson et ses collaborateurs :

Pays	*Réussite*
USA	25 %
Japon	46 %
Corée	58 %
USA/Fuson Classe anglophone	55 %
USA/Fuson Classe hispanique	82 %

Les différences entre enfants occidentaux et enfants asiatiques ne sont donc pas irréductibles. Lorsque la langue maternelle ne favorise guère l'apprentissage

3. Fuson K., Smith S. & Lo Cicero A.M., 1997. Supporting latino first graders'ten-structured thinking in urban classrooms, *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 738-766.

parce qu'elle n'explicite pas le groupement de dix, le pédagogue peut pallier les difficultés que rencontrent de nombreux enfants en les rendant « bilingues ».

La supériorité des élèves asiatiques dans l'accès au calcul réfléchi d'une addition

Au-delà de ces conséquences concernant la compréhension de la numération décimale, l'apprentissage d'une suite verbale régulière favorise également **l'accès au calcul réfléchi d'une addition et d'une soustraction**.

Rappelons tout d'abord (*cf.* chapitre 2 de cette Présentation) que lorsqu'un enfant ne connaît pas le résultat d'une addition, il peut le reconstruire en utilisant diverses stratégies : comptage 1 à 1 du tout, surcomptage 1 à 1, stratégie de calcul réfléchi tel que le passage de la dizaine (9 + 4 = 9 + 1 + 3, par exemple). Nous avons montré par ailleurs (*cf.* chapitre 2) que les stratégies de calcul réfléchi mettant en œuvre des décompositions-recompositions, comme le passage de la dizaine, favorisent mieux la mémorisation que les stratégies de comptage. Or, du fait que les enfants chinois et américains ne parlent pas les nombres de la même manière, ils n'utilisent pas non plus les mêmes stratégies pour calculer un résultat d'addition qu'ils ne connaissent pas encore par cœur.

Geary et ses collègues[4] ont montré que des enfants chinois, interrogés sur une addition élémentaire dont ils n'ont pas encore mémorisé le résultat, emploient massivement une stratégie de calcul réfléchi comme le « passage de la dizaine » (68 % des cas). Cela s'explique aisément parce qu'en chinois, l'emploi d'une telle procédure va de soi : pour calculer 9 + 4, par exemple, les jeunes enfants savent que le résultat dépasse 10, et comme les nombres après 10 se disent dix-un, dix-deux… dix-huit, dix-neuf, il est clair qu'il leur suffit de chercher de combien 9 + 4 dépasse 10 pour connaître le résultat : ici, dix… trois. La façon dont ils parlent les nombres après dix les conduit *naturellement* à utiliser un **passage de la dizaine**.

En revanche, il n'y a que 13 % des enfants américains qui utilisent ce type de stratégie. Massivement, ces enfants comptent 1 à 1 (87 % des cas). Pour 9 + 4, ils s'aident par exemple de leurs doigts « 9, 10 (1), 11 (2), 12 (3), 13 (4) ». Cela aussi s'explique aisément : des enfants qui utilisent une suite numérique irrégulière ne font pas spontanément usage de procédures comme le passage de la dizaine, car il ne leur vient pas immédiatement à l'esprit que, pour trouver le résultat, il suffit de chercher de combien celui-ci dépasse 10. L'irrégularité de leur suite verbale leur *masque le but de cette procédure* alors que, de manière générale, le but d'une procédure est sa caractéristique essentielle : pour comprendre ce que fait un enfant, il faut d'abord comprendre ce qu'il cherche à faire. À défaut d'une action pédagogique volontariste de la part de leurs enseignants, donc, les enfants qui ne disposent pas d'une suite verbale régulière cherchent le résultat en comptant 1 à 1. Des recherches comme celle de Geary et ses collègues l'ont confirmé.

Comme les stratégies de calcul réfléchi favorisent mieux la mémorisation (*cf.* chapitre 2), il n'est guère étonnant que les mêmes chercheurs observent que dans 86 % des cas d'additions proposées, en fin de CP, les enfants chinois connaissent le résultat par cœur alors que les enfants américains n'ont un tel accès direct au résultat que dans 29 % des cas. Il y a deux ans de décalage développemental dans la mémorisation du répertoire additif entre enfants chinois et américains !

Mais au-delà, il convient d'insister sur le fait que l'emploi de stratégies de décomposition-recomposition n'a pas pour seul effet d'accélérer la mémorisation du répertoire additif. Les performances en soustraction sont évidemment également en jeu : l'enfant qui calcule 9 + 4 par passage de la dizaine accédera plus facilement au calcul de 13 – 4 sous la forme « 13 moins 3, 10 et encore moins 1… » que celui qui compte 1 à 1. Et de manière plus générale encore, les stratégies utilisées pour calculer une addition ou une soustraction élémentaire lors des premiers apprentissages numériques ont des répercussions sur l'ensemble des apprentissages numériques. Nous avons vu (chapitre 2) que les enfants en grande difficulté dans leurs apprentissages numériques sont des enfants enfermés dans un comptage 1 à 1. Quand un enfant apprend une comptine verbale régulière, le risque qu'il soit en échec est de toute évidence moindre que lorsqu'il ne dispose pas d'un tel outil pour conceptualiser le nombre.

Après s'être intéressé au « pourquoi ? » d'un tel enseignement, il convient maintenant de s'intéresser à son « comment ? ».

Un choix fondamental : enseigner la comptine régulière sans l'interpréter d'emblée

Pour enseigner la comptine numérique régulière, il aurait été possible, dans *J'apprends les maths CP avec Tchou,* de faire compter des objets aux élèves : « un, deux, trois… neuf, dix, dix et un, dix et deux, dix et trois… dix et neuf, deux dix, deux dix et un, etc. », tout en s'arrangeant pour qu'ils séparent les 10 premiers objets comptés des suivants.

Au moment de dire « dix et un », les élèves auraient eu la possibilité de comprendre que ce nombre se dit ainsi parce que la collection correspondante est formée de dix unités d'un côté et d'une unité supplémentaire de l'autre. En ajoutant successivement d'autres objets, ils auraient eu, de même, la possibilité de comprendre les désignations « dix et deux », « dix et trois », etc. Au moment de compter « deux dix », les élèves se seraient trouvés face à une collection formée de dix unités d'un côté et de dix autres plus loin,

4. Geary D.C., Fan L. & Bow-Thomas C.C., 1992. Numerical cognition : Loci of ability differences comparing children from China and the United States, *Psychological Science,* 3, 180-185.

ce qui leur aurait donné la possibilité de comprendre que ce nombre se dit ainsi parce qu'on peut « compter des dix » (un dix, deux dix) comme auparavant on « comptait des uns ».

En bref, il aurait été possible d'enseigner la suite verbale régulière en l'interprétant d'emblée comme correspondant à un changement d'unité dans la procédure de comptage. En fait, ce choix aurait été très proche de celui qui a été retenu dans la version *Picbille* de *J'apprends les maths CP*. Rappelons en effet que dans cette dernière, nous recommandons aux enseignants de dire que « quarante, c'est quatre dix », parce que cette locution aide mieux les élèves à comprendre ce qu'est le nombre quarante que la locution « quatre dizaines ».

Mais c'est un choix très différent qui a été retenu dans la version *Tchou*, ce qui justifie d'ailleurs l'existence des deux versions : le choix d'enseigner la suite régulière, dans un premier temps, sur un plan strictement verbal, indépendamment de tout comptage d'objets, en s'appuyant seulement sur ses régularités.

Pour préciser la nature de ce choix, remarquons qu'il s'agit, dans un premier temps au moins, de favoriser le même type d'apprentissage que celui qu'on observe chez les enfants francophones avec la suite habituelle, quand ils commencent à apprendre les nombres au-delà de « vingt ». Ces enfants francophones se réjouissent en effet de découvrir qu'ils n'ont pas toute une série de nouveaux mots à mémoriser, parce qu'il leur suffit d'accoler au mot « vingt » ceux du début de la suite pour savoir continuer au-delà de vingt : « vingt et *un*, vingt-*deux*, vingt-*trois*… ».

Pour autant, ces enfants sont, dans un premier temps, incapables d'interpréter ces nombres en terme de décomposition additive : ils ne savent pas que « vingt-quatre », par exemple, c'est « vingt et encore quatre »[5]. Pour eux, « vingt-quatre » c'est seulement le mot qui vient après « vingt-trois ». Il s'agit donc d'un apprentissage « par cœur », mais cet apprentissage « par cœur » est rendu extrêmement facile par la découverte de la régularité verbale.

C'est ce type d'apprentissage de la suite numérique « à l'asiatique » que, dans la version Tchou, nous avons choisi de favoriser au début de l'année de CP : plutôt que de demander aux élèves d'interpréter d'emblée des désignations comme « deux dix et trois » en termes de décomposition additive et de comptage de « grandes unités », ils apprennent « par cœur » la suite verbale régulière en s'appuyant sur ses seules régularités.

Pourquoi un tel choix ?

Remarquons d'abord que c'est ainsi que progressent les enfants asiatiques[6]. En effet, vers 4 ans et demi, aucun enfant asiatique, même s'il sait compter loin, n'a compris que si l'on ajoute sept objets à « deux dix objets », il y en a en tout « deux dix sept ». Tous ceux qui réussissent obtiennent le résultat en surcomptant 1 à 1 au-dessus de « deux dix » : deux dix un, deux dix deux, deux dix trois, etc. Et à 5 ans et demi environ, il n'y a qu'une moitié de ces mêmes enfants qui ont compris que, si l'on ajoute sept objets à « deux dix objets », il n'est pas nécessaire de compter parce qu'on est sûr qu'il y en a « deux dix sept » en tout. De plus, ce sont les élèves asiatiques qui connaissent la comptine régulière le plus loin, qui comprennent le plus précocement que « deux dix sept, c'est deux dix et encore sept ».

Dans les pays asiatiques, c'est-à-dire dans le contexte favorable où les enfants n'ont que cette seule suite numérique régulière à apprendre, tout se passe donc comme si une phase d'apprentissage purement verbale de cette suite, sans l'interpréter, en s'appuyant sur ses seules régularités, était nécessaire. Il est raisonnable de penser qu'un tel cheminement ne peut que profiter à des enfants occidentaux qui, eux, doivent apprendre deux suites numériques : la régulière et, évidemment, la leur. C'est là un argument important en faveur du choix fait ici (un autre argument, plus décisif que le précédent, sera présenté à la fin de ce chapitre, après que nous aurons analysé de manière plus fine comment s'effectue l'apprentissage dans la progression *Tchou*).

5. Fuson K. & Smith S., 1996, cités dans Ho C. & Fuson K., 1998. Children's knowledge of teen quantities as tens and ones : comparisons of chinese, british and american kindergartners, *Journal of Educational Psychology*, 90, 3, 536-544.

6. Ho C. & Fuson K., *ibid.*

Comment les élèves apprennent avec la progression *Tchou*

Deux suites verbales, mais… une seule suite d'écritures chiffrées

Pour comprendre comment les enfants apprennent dans le cadre de la progression *Tchou*, il est essentiel de noter que les élèves y apprennent deux suites verbales différentes, mais que chacune d'elles est associée à la même suite d'écritures chiffrées : 1, 2, 3…, 9, 10, 11, 12…, 19, 20, 21, 22, etc. Cette remarque est essentielle, parce que nous allons voir qu'après avoir interprété les « nombres comme Tchou » (trois dix et sept, c'est 3 dix et encore 7), c'est grâce à cette écriture commune que les élèves vont transférer vers les « nombres dits comme nous » ce qu'ils viennent d'apprendre concernant les « nombres dits comme Tchou ».

Les trois phases du progrès

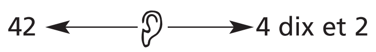
1. Les « nombres comme Tchou » et l'écriture chiffrée

La suite régulière des « nombres comme Tchou » est introduite lors de la séance liée aux pages 26-27 folios élève. Or, dès ce moment, les élèves apprennent non seulement la façon dont Tchou dit ces nombres, mais aussi comment ils s'écrivent en chiffres.

Ils l'apprennent d'ailleurs très facilement parce que « 3 dix et 7 » s'écrit « 37 », « 4 dix et 2 » s'écrit « 42 », « 9 dix et 5 » s'écrit « 95 », etc. La règle d'écriture d'un « nombre dit comme Tchou » est donc transparente : « On écrit le chiffre correspondant au premier nombre qu'on entend ; le mot dix ne correspond à aucune écriture et on écrit enfin le chiffre correspondant au dernier nombre qu'on entend. »

Une seule exception à cette règle : les nombres comme « dix et trois », qui commencent par « dix » et dont l'écriture commence par le chiffre « 1 », bien que ce chiffre ne s'entende pas. Mais comme les élèves sont fréquemment confrontés à ces nombres qui apparaissent tôt dans la suite, ils apprennent également très vite à les écrire.

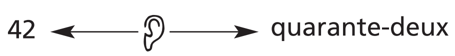
Très rapidement, donc, les élèves savent lire et écrire un « nombre comme Tchou », ce qu'on notera ainsi :



Dans ce schéma, on a dessiné une oreille entre « 42 » et « 4 dix et 2 » pour rappeler que l'association entre ce qui est écrit, « 42 », et ce qui est dit, « 4 dix et 2 », est d'ordre grapho-phonologique et non d'ordre conceptuel : il est normal qu'à ce moment de la progression les élèves ne sachent pas que « 4 dix et 2, c'est 4 fois 10 et encore 2 », ni que 42 est égal à cette même décomposition.

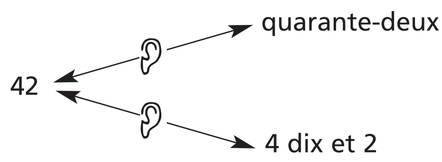
2. Les « nombres comme nous » et l'écriture chiffrée

La phase précédente du progrès se déroule entre la séance des pages 26-27 folios élève et celle des pages 36-37 folios élève. Dès la séance liée à la page 38 folio élève, on commence à leur enseigner systématiquement à écrire les nombres quand ils sont dits « comme nous ». Les élèves apprennent d'abord à écrire les nombres dont l'oralisation « comme nous » commence par dix (dix-huit, par exemple), par vingt (vingt-quatre), par trente (trente-deux) et quarante (quarante-cinq). Il s'agit d'apprendre que, quand l'oralisation d'un nombre « comme nous » commence par dix, son écriture commence par « 1 », quand elle commence par « vingt », son écriture commence par « 2 », etc. Les élèves s'approprient donc les associations du type :



Là encore, dans ce schéma, on a dessiné une oreille entre « 42 » et « quarante-deux » pour rappeler que l'association entre ce qui est écrit, « 42 », et ce qui est dit, « quarante-deux », est d'ordre grapho-phonologique et non d'ordre conceptuel : il est normal qu'à ce moment de la progression, les élèves ne sachent pas encore que « quarante-deux », c'est 4 fois 10 et encore 2.

À ce moment de la progression, donc, les élèves ont associé l'écriture chiffrée à la fois aux « nombres comme nous » et aux « nombres comme Tchou ».



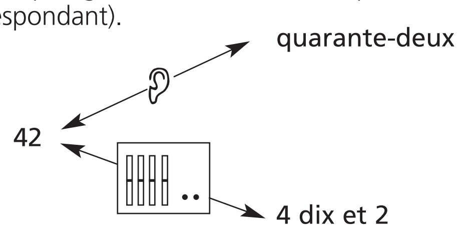
Mais les nombres « comme nous » (quarante-deux) et ceux « comme Tchou » ne sont pas encore en relation directe, c'est-à-dire indépendante de l'écriture. Ce sera l'acquis majeur de la phase suivante.

3. Les « nombres comme nous » et « ceux comme Tchou » mis en relation via leur écriture chiffrée et un modèle conceptuel des nombres

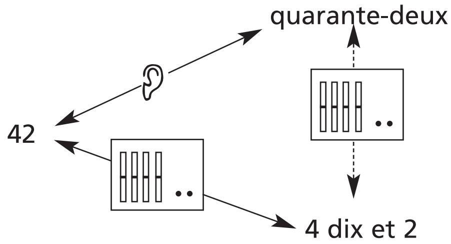
De manière progressive entre les séances des pages 71 et 74 folios élève, puis de manière systématique à partir de la séance de la page 80 folio élève, une évolution majeure se produit : l'enseignant favorise l'interprétation des nombres comme Tchou en terme de changement d'unité de compte.

Les élèves qui ne l'auraient pas déjà découvert par eux-mêmes apprennent que « 4 dix et 2 » unités, lorsqu'on s'exprime comme Tchou, peuvent être organisées en 4 groupes de dix alors que 2 unités restent isolées. Alors qu'ils avaient d'abord appris la suite verbale « à l'asiatique », en s'appuyant sur ses seules régularités, les élèves deviennent capables d'interpréter ces régularités en accordant à dix son statut de « grande unité de compte ».

L'écriture 42 était déjà associée, d'une part, à l'oralisation des nombres « comme nous » (« quarante-deux »), et, d'autre part, à l'oralisation « comme Tchou » (« 4 dix et 2 »). Or, cette dernière association change de nature : elle devient conceptuelle (dans le schéma ci-dessous, au centre de la flèche qui relie 42 et 4 dix et 2, on a dessiné quatre boîtes de dix et deux unités qui figurent le modèle conceptuel du nombre correspondant).



Et grâce à l'écriture 42, qui est commune aux « nombres comme nous » et à « ceux comme Tchou », grâce au comptage « comme nous » de collections organisées en « dix » et « uns », les élèves transfèrent aux « nombres comme nous » ce qu'ils viennent de découvrir concernant les « nombres comme Tchou ». D'où la flèche pointillée de droite dans le schéma ci-dessous :



Précisons comment l'écriture commune favorise ce transfert. À partir de « quarante-deux », les élèves savent produire l'écriture 42 (flèche du haut), ils savent également lire cette écriture « comme Tchou » : « 4 dix et 2 » (flèche du bas). Comme à ce moment, cette façon de dire les nombres « comme Tchou » a été interprétée par l'élève (4 dix et 2, c'est 4 fois dix et encore 2), la désignation orale de départ, « quarante-deux », donne elle-même accès, via l'écriture 42, au modèle conceptuel de ce nombre : « quarante-deux, c'est 4 fois dix et encore 2 ».

Les principaux avantages de cette progression

Pour les nombres commençant par vingt, trente, etc., il est particulièrement facile d'accéder à une représentation structurée en dizaines et unités

Ce qui vient d'être dit concernant 42 peut être généralisé à tous les nombres dont les désignations orales sont les plus régulières : ceux qui commencent par ***vingt***, ***trente***, ***quarante***, ***cinquante*** et s***oixante*** et sont inférieurs à 69. Dans le cadre d'une telle progression, ces désignations orales conduisent plus facilement à une représentation structurée en dizaines et unités que dans le contexte d'une progression habituelle.

Nous venons d'en voir la raison : il est facile, à partir de ce qu'on entend, d'apprendre à écrire ces nombres (« vingt-quatre » s'écrit avec un « 2 » et un « 4 » parce qu'on entend « vingt » et « quatre », « trente-cinq » s'écrit avec un « 3 » et un « 5 » parce qu'on entend « trente » et « cinq »…), et la simple lecture de ces écritures chiffrées « comme Tchou » fournit aux élèves le modèle conceptuel de ces nombres : « vingt-quatre, c'est 2 fois dix et encore 4 », « trente-cinq, c'est 3 fois dix et encore cinq », etc.

Les désignations écrites conduisent à une représentation des nombres structurée en dizaines et unités, même quand ils sont difficiles à lire

Mais qu'en est-il des nombres dont la désignation orale est opaque, c'est-à-dire, d'une part : onze, douze… seize, d'autre part : soixante-dix, soixante et onze, soixante-douze… soixante-dix-neuf, et enfin : quatre-vingt-onze, quatre-vingt-douze, etc. ?

Remarquons d'abord que dans la progression *Tchou*, lorsque ces nombres sont donnés sous forme écrite, 13, par exemple, les élèves ont accès à un modèle conceptuel du nombre (c'est dix et trois), même quand ils ne savent pas encore lire le nombre en question. Cela apparaît de manière évidente avec les grands nombres de la liste précédente. « 95 », par exemple, est difficile à lire « quatre-vingt-quinze » parce qu'il n'y a aucune correspondance entre les chiffres écrits et les mots prononcés. Or, à partir de l'écriture 95, il est facile à un élève qui a suivi la progression *Tchou* de savoir que ce nombre correspond à 9 dix et 5, de la même manière que 42 correspond à 4 dix et 2. Et cela même quand l'enfant ne sait pas encore lire l'écriture chiffrée 95. D'une certaine manière, les élèves peuvent « connaître ce nombre sans savoir le dire » [7].

De plus, les élèves apprennent généralement plus vite à lire ces nombres parce que, comme nous allons le voir, ils apprennent plus vite à les écrire dans une situation de dictée (c'est-à-dire à partir de leur désignation orale).

Il est plus facile d'apprendre à écrire les nombres dont les désignations orales sont irrégulières dans le cadre de la progression *Tchou*

L'élève qui entend « seize, soixante-treize, quatre-vingt-douze », par exemple, risque moins, dans le cadre de la progression *Tchou,* de tomber dans le piège qui consiste à essayer d'écrire en chiffres ce qui s'entend (pour quatre-vingt-dix-huit, par exemple, on entend 4 puis 20 puis 10 puis 8 !). Il est clair que l'élève qui pense qu'il y a une correspondance simple entre l'écriture chiffrée et ce qu'il entend ne peut pas réussir !

Pour écrire ces nombres, la question qu'il faut se poser est la suivante : « C'est combien de dix et combien de uns ? » La première partie de la question donne le chiffre des dizaines, et la seconde celui des unités. Avoir répondu à cette question, c'est disposer de l'écriture chiffrée. Or, dans le cadre de la progression *Tchou*, cette interrogation revient à se demander : « Comment se dit ce nombre comme Tchou ? » Concluons : la progression *Tchou* aide mieux les élèves à écrire les nombres dont les désignations orales sont irrégulières parce que la question qu'il faut se poser pour réussir est naturelle dans le cadre d'une telle progression.

7. Il est d'ailleurs vraisemblable que dans le cadre de la progression Tchou, les éventuelles difficultés d'apprentissage de la lecture-écriture alphabétique rejaillissent moins sur les apprentissages numériques. La compréhension d'un nombre comme douze, par exemple, y dépend moins de la connaissance du fait que les mots « douze » et « deux » commencent par le même phonème.

Chapitre 5

LA NUMÉRATION ET LE GROUPEMENT PAR 2, 5 ET 10 AU CP

Plan du chapitre

Qu’est-ce que la numération décimale ?

Présentons d'abord ce que serait un système numérique sans numération décimale. Pour cela, il suffit à nouveau de s'imaginer en train de compter combien il y a d'objets dans une collection donnée, mais avec les lettres de notre alphabet plutôt qu'avec les mots-nombres habituels : on prend un premier objet en disant « A », un autre en disant « B », encore un autre en disant « C », etc. Supposons que le dernier objet est pris en prononçant la lettre « R ». Les membres d'une communauté qui auraient décidé de compter ainsi s'accorderaient à dire de la collection précédente qu'elle contient « R objets ». Et si l'un des membres de cette communauté nous demandait d'aller chercher une collection de « W objets » par exemple, nous saurions répondre à sa requête.

On voit qu'utilisée ainsi, une suite de mots connue par cœur (comme c'est le cas avec les lettres de l'alphabet) constitue un authentique système numérique, système qui permet, comme le nôtre, de communiquer concernant les premiers nombres. Cependant, lorsque la taille de la collection augmente, on se doute que de sérieuses difficultés surgissent : avec un tel système, il faut connaître un alphabet qui comprend un très grand nombre de lettres parce qu'on ne peut pas compter au-delà de la suite verbale qui a été mémorisée.

Ainsi, pour former une collection qui, pour nous, comprend huit cent cinquante-deux objets, il aura été nécessaire d'avoir mémorisé huit cent cinquante-deux mots (lettres) différent(e)s et de les compter 1 à 1 jusqu'à entendre celui qui correspond à ce nombre. Quand on sait le temps nécessaire aux enfants pour mémoriser dans l'ordre les 26 lettres de notre alphabet, il apparaît clairement qu'à partir d'une certaine taille, la mémorisation d'une telle suite verbale est au-delà des ressources cognitives qu'il est raisonnable de consacrer à une telle affaire au sein d'une communauté humaine !

La numération est le moyen inventé par l'humanité pour pouvoir désigner verbalement, tant à l'oral qu'à l'écrit, n'importe quel nombre, aussi grand soit-il. La numération résout donc en premier lieu un problème de ressources cognitives, en palliant l'impossibilité de mémoriser une suite verbale qui serait de grande taille et sans aucune régularité. Mais elle résout en second lieu un problème logique : on sait, en effet, que l'ensemble des nombres qu'il faut pouvoir désigner est infini alors que le stock de mots-nombres différents que l'on peut consacrer à cette désignation est, lui, nécessairement fini : ces mots sont une toute petite partie de ce qu'on appelle le lexique de la langue, qui est un ensemble fini d'environ 40 000 mots en français. Il faut donc réussir à désigner individuellement un nombre infini d'entités à l'aide d'un nombre fini de mots !

Les numérations modernes, dans le même temps qu'elles résolvent le problème de ressources cognitives, résolvent le problème logique en utilisant deux grands principes : un principe de « changement d'unité de compte » (quand une collection est nombreuse, ça va plus vite de compter des mille ou des cents que de compter des unités simples) et un principe d'écriture que nous examinerons dans un second temps.

Apprendre à « changer d’unité de compte »

Montrons que comprendre la numération, c’est comprendre qu’on peut « résumer » un comptage de 1 en 1 par un comptage de 10 en 10 ou, mieux, par un comptage des groupes de 10.
Quand on dénombre une importante collection d’objets, au moment d’en ajouter 1 à 99 autres, on peut considérer qu’il y en a « un cent » (les Anglais disent « *one hundred* »). Il suffit alors de former d’autres groupements identiques et se mettre à compter les cents : deux cents, trois cents, quatre cents… de la même manière qu’on comptait auparavant les « uns ». C’est « le cent » qui est « un » dans ce nouveau comptage, c’est donc « le cent » qui est l’« unité » (le mot « unité » est utilisé ici dans le même sens que lorsqu’on dit que le *mètre*, le *décamètre*, l’*hectomètre* ou le *kilomètre* sont différentes unités).

Or, dans certaines langues comme le coréen, le chinois ou le japonais, on a le bonheur de compter des « dix » avant de compter des « cents ». Ainsi, dans ces langues, 20 se dit « deux dix », 21 se dit « deux dix un », 22 « deux dix deux », et on continue ainsi : « deux dix trois » (23), « deux dix quatre » (24)… « deux dix neuf » (29), « trois dix » (30), « trois dix un » (31),

« trois dix deux » (32)… « quatre dix » (40)… « cinq dix » (50)…

Les chercheurs en psychologie cognitive ont fait, dans les années 1990 - 2000, une découverte fondamentale : les enfants des pays asiatiques réussissent bien mieux en numération et en calcul que ceux des pays occidentaux. C'est là un argument important qui incite à mieux s'appuyer sur la numération orale pour aider les enfants à construire la dizaine et la centaine comme « grandes unités de compte », même si notre langue s'y prête moins bien[1].

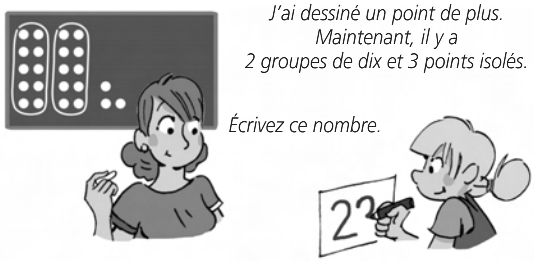
En fait, nous recommandons fortement d'utiliser le plus fréquemment possible l'expression « groupe de dix » comme synonyme de « dizaine », de sorte que « trente-sept » soit décrit non seulement comme « **3** *dizaines* et **7** *unités* », mais aussi comme « **3** groupes de *dix* et **7** » et même comme « **3** *dix* et **7** *uns* ».

C'est ainsi que le problème de la numération est essentiellement un problème de changement d'unités : pour former une collection de 32 objets, par exemple, on peut soit les compter 1 à 1, soit encore prendre le « dix » comme « grande unité » du comptage et dire « un groupe de dix, deux groupes de dix, trois groupes de dix, 30 et encore deux, c'est 32 ». Aider les enfants en numération, c'est avant tout leur apprendre qu'on peut « résumer » un comptage de 1 en 1 par un ***comptage des* groupes de *dix*.**

Réfléchir la suite des écritures chiffrées pour comprendre la numération décimale

Nous avons vu que pour résoudre le problème logique de la désignation des nombres, un système de groupements est nécessaire. Cependant, l'usage de groupements par 5 ou 20 aurait tout aussi bien convenu que le groupement par 10. On remarquera d'ailleurs que la « base vingt » a autrefois été d'un usage courant et que certaines expressions de la langue française en gardent la trace : « quatre-vingts », l'hôpital des «quinze-vingts», par exemple.

Au départ de toute progression sur la numération décimale, il y a donc la nécessaire découverte que le groupement que notre culture a retenu, celui qui fonde notre système d'écriture, est dix (on dit aussi : « qui en est la *base* »). L'activité qui permet le mieux de comprendre le rôle du groupement par dix dans notre façon de penser, de dire et d'écrire les nombres est certainement celle du **« compteur des nombres »**. L'enseignant engendre une suite de collections-témoins de points en ajoutant successivement une nouvelle unité, et les élèves doivent produire la suite des écritures et des désignations orales correspondantes.



Dans un tel contexte, le fait que vingt-trois corresponde à 2 groupes de dix et encore 3, par exemple, apparaît explicitement sur le dessin de la collection-témoin et cela conduit à réfléchir l'écriture, « 23 », de ce nombre : le premier chiffre dit combien il y a de groupes de dix, le second combien il y a de points « isolés ». Dans cette expression, le mot « isolé » signifie « qui n'est pas groupé par dix ». Cela permet également de réfléchir à la prononciation des nombres : « vingt » signifie 2 groupes de dix, par exemple.

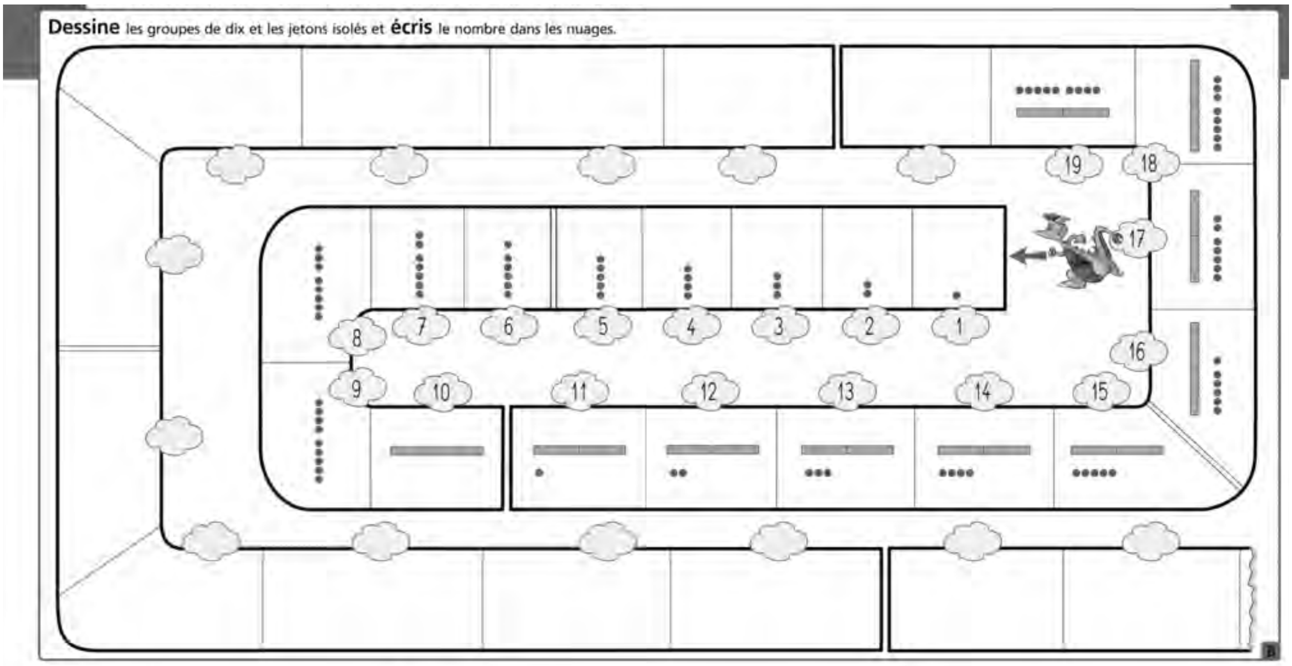
On remarquera qu'il est plus naturel de dire « 23, c'est 2 groupes de dix et 3 points isolés » que de dire « 13, c'est 1 groupe de dix et 3 points isolés ». Dans ce dernier cas, en effet, on a plutôt envie de dire « 13, c'est 10 et encore 3 » parce que l'usage du mot « groupe » n'a rien de naturel quand il y a un seul groupe. Pour autant, il ne faut pas hésiter à s'exprimer ainsi dès le nombre onze : « 11, c'est 1 groupe de dix et 1 point isolé ». Les élèves qui ne comprendraient pas d'emblée cette expression la comprennent lorsqu'ils découvrent que « 20, c'est 2 groupes de dix et 0 point isolé ». S'exprimer ainsi d'emblée prépare cette compréhension.

Dans la progression, cette activité est menée successivement avec des groupes de dix de Perrine et avec les doigts qui sont levés l'un après l'autre (séquence pages 74-75 folios élève), et avec les nombres « comme Tchou » (séquence pages 80-83 folios élève) alors que ceux-ci apparaissent successivement l'un après l'autre dans une sorte d'escargot (voir fac-similé en haut de la page de droite).

Remarque

La première dictée de nombres supérieurs à 20 qui est proposée aux élèves, après l'activité du « compteur des nombres », présente la particularité d'être une dictée de « groupes de dix et d'unités isolées ». En effet, l'enseignant dicte : « 3 groupes de dix et 4 points isolés », par exemple, et les élèves écrivent le nombre correspondant. Ensuite, l'enseignant interroge un élève qui doit dire ce nombre « comme nous ». Ce choix s'explique du fait que la première dictée de nombres après 20 est un évènement dans le parcours scolaire d'un élève. Aussi ce dernier mémorise-t-il mieux ce qu'il apprend ce jour-là ; avec un tel choix pédagogique, il mémorise mieux que l'écriture des nombres reflète leur organisation décimale.

1. Les travaux en psychologie cognitive évoqués dans ce paragraphe expliquent que nous ayons décidé, dès la rentrée scolaire 2001, de proposer deux versions de *J'apprends les maths CP*. La version classique, *J'apprends les maths CP avec Picbille*, et celle-ci, *J'apprends les maths CP avec Tchou,* où les enfants apprennent dès le début de l'année, en plus de la comptine numérique française, une suite verbale régulière : « un, deux, trois... neuf, dix et un, dix et deux, dix et trois... dix et neuf, deux dix et un, deux dix et deux, deux dix et trois... deux dix et neuf, trois dix... ».
La version *Tchou* ne fait que « pousser à leur maximum » les choix pédagogiques qui sont déjà présents dans la version *Picbille*.



Comptage de dix en dix et comptage des groupes de dix

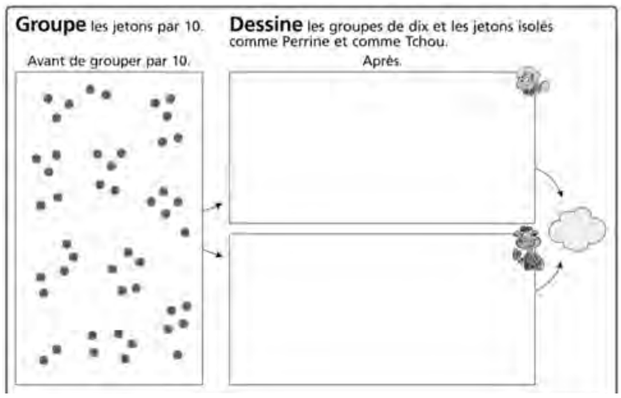
Remarquons d’abord qu’il s’agit de deux savoir-faire distincts bien qu’ils aient en commun de nécessiter la formation de groupes de dix. En effet, ils ne conduisent pas aux mêmes verbalisations. Lorsqu’on compte de dix en dix, on s’exprime en disant : « dix, vingt, trente, quarante et encore sept, quarante-sept », par exemple, alors que lorsqu’on compte des groupes de dix, on s’exprime en disant : « un groupe de dix, deux groupes de dix, trois groupes de dix, quatre groupes de dix et encore sept, quarante-sept ». Aucun de ces deux savoir-faire ne peut être considéré comme nécessairement antérieur à l’autre : tout dépend en effet de la démarche d’apprentissage qui est favorisée[2].

Du point de vue pédagogique, chacun de ces deux savoir-faire présente un avantage que l’autre n’a pas. Ainsi, le comptage de dix en dix utilise les mots « vingt », « trente »… Ce sont ceux qui sont utilisés lorsqu’on compte de 1 en 1 et cela présente l’avantage de situer cette forme de comptage dans le prolongement du comptage 1 à 1 : c’est un comptage 1 à 1 dont on ne dit qu’un mot sur dix ! En revanche, le comptage des groupes de dix a, lui, l’avantage de se baser explicitement sur un changement d’unité de compte : on dit « un » alors que l’on pointe 10 unités.

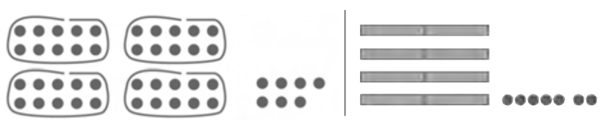
Or, les élèves qui ont des difficultés à comprendre la numération décimale ont tendance à « oublier » l’existence des groupes de dix quand ils s’intéressent aux unités simples (ils retombent dans le comptage 1 à 1) et ils « oublient » les unités simples quand ils s’intéressent aux dizaines (celles-ci ne sont pas considérées comme formées de 10 unités simples). Les enfants en difficulté dans la compréhension de la numération décimale alternent les points de vue (unités simples vs. groupes de dix) sans pouvoir les coordonner.

Comme le comptage de dix en dix privilégie la prise en compte des unités simples et celui des groupes de dix celle de la dizaine comme « grande unité », les deux formes de comptage s’avèrent complémentaires d’un point de vue pédagogique et nous recommandons de les utiliser l’une et l’autre.

Une autre activité permettant de mettre en œuvre les deux sortes de comptage est par exemple celle que l’on trouve à partir de la séquence page 86.



Les élèves sont face à une collection de points qui ne sont pas organisés[3], ils doivent former les groupes de dix puis redessiner la collection « comme Perrine » et « comme Tchou », c’est-à-dire sous les deux formes suivantes (il y a 47 points) :



2. Fuson, K. C. (1990). Conceptual structures for multiunit numbers : Implications for learning and teaching multidigit addition, subtraction, and place value. *Cognition and Instruction*, 7, 343-403.

3. En fait, les points sont souvent groupés par 2 ou 3, ce qui permet de former des groupes de dix sans compter 1 à 1.

On remarquera que les deux modes de représentation de la dizaine (comme Tchou et comme Perrine) apparaissent eux aussi complémentaires d'un point de vue pédagogique : le groupe de dix « comme Perrine » favorise mieux la prise en compte des unités simples que le groupe de dix « comme Tchou » parce qu'on voit chacune d'elles; en revanche, le groupe de dix comme Tchou met mieux en évidence que la dizaine est une nouvelle unité de compte du fait qu'on ne voit plus les unités simples. L'organisation des collections de points comme Perrine est une nouveauté de l'édition 2008 et nous pensons qu'elle en constitue une amélioration sensible.

Remarques

1. La boîte de Tchou (qu'il vaut mieux appeler « groupe de dix de Tchou ») est un symbole particulièrement intéressant de la dizaine. En effet, supposons que l'enseignant demande à un élève d'écrire combien il y a de jetons en tout ci-dessous :

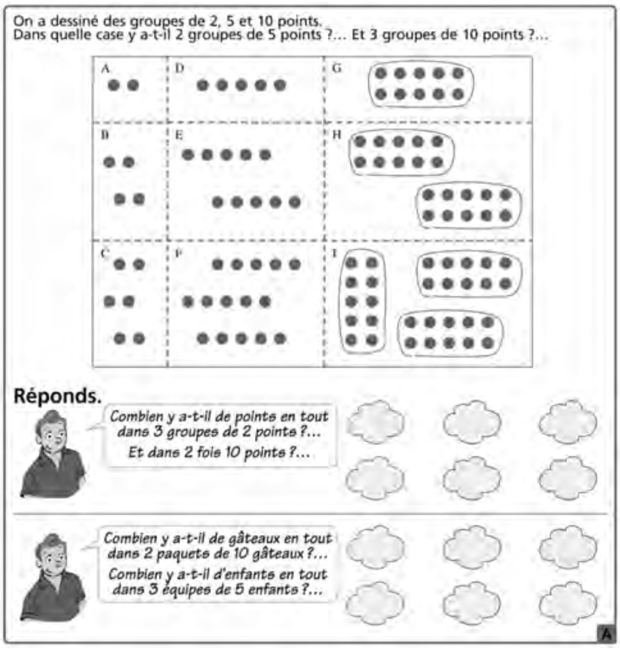
Si un élève écrit 43, est-on sûr qu'il a compris l'écriture de ce nombre ? Cet élève appréhende-t-il qu'il y a ci-dessus à la fois « quarante-trois jetons » (point de vue des unités simples) et « 4 groupes de dix et encore 3 jetons » ? Évidemment, non ! Il se peut que l'élève ait compris que face à un tel exercice, il faut juxtaposer le nombre de boîtes (4) et celui des jetons qu'on voit (3) pour écrire la bonne solution (cas typique de l'élève qui, privilégiant les dizaines, « oublie » qu'elles sont formées de 10 unités simples). Cependant, au moindre doute, l'enseignant a la possibilité de lui dire : « Tu as écrit qu'il y a quarante-trois jetons, mais je n'en vois que 3 ! » L'élève doit alors expliciter que chaque boîte est un groupe de dix, que 4 groupes de dix, c'est 40 et encore 3, 43.
La situation de masquage présente l'intérêt d'autoriser une interrogation sur ce qui est présent dans l'image mais sous une forme masquée. Elle crée la possibilité d'un dialogue pédagogique conduisant les élèves à articuler les deux points de vue : celui des groupes de dix et celui des unités simples.

2. De même que l'utilisation d'un matériel structuré peut conduire à des réussites superficielles si les pédagogues ne sont pas sur leurs gardes, la réussite d'un élève à une activité telle qu'une dictée de nombres n'assure pas qu'il ait compris la numération décimale. En effet, très rapidement (parfois dès la maternelle), les enfants savent écrire « vingt-quatre » en chiffres, parce qu'ils savent que les « vingt », ça commence par un « 2 », et parce qu'après vingt, on entend « quatre »[4]. Mais l'enfant qui écrit « 24 » de cette manière n'a encore aucune connaissance en numération écrite : il sait que l'écriture commence par un « 2 », mais il ne sait pas nécessairement que ce « 2 » désigne un nombre de « dizaines » ou encore le nombre de « groupes de dix ». D'où l'intérêt des dictées de « groupes de dix et d'unités isolées ».

Bien entendu, la réussite à une dictée portant sur des nombres entre 69 et 100 est, du point de vue de la compréhension de la numération décimale, beaucoup plus informative : lorsque le nom d'un nombre commence par « soixante », par exemple, on ne peut pas connaître son écriture avant d'avoir entendu la suite : si c'est « quatre », par exemple, il contient 6 groupes de dix, mais si c'est « quatorze », il en contient 7. Pour savoir écrire ces nombres, il faut être capable de les analyser en dizaines et unités (voir séquences pages 126 et 134 folios élève).

Le groupement par 2, 5 et 10 et la numération décimale

Une autre nouveauté de l'édition 2008 de *J'apprends les maths CP* réside dans la façon dont sont étudiés les groupements par 2, 5 et 10. D'une part, les groupements par 2 et 5 sont abordés très précocement dans l'année (séquence page 64 folio élève) et ils le sont de façon beaucoup plus systématique que dans les anciennes éditions. D'autre part, ces groupements par 2 et 5 sont étudiés en articulation avec ceux par 10, dans des leçons telles que celle-ci (séquence page 98 folio élève) :



En fait, ce type de séquence a deux objectifs : il s'agit à la fois de préparer le travail sur la multiplication et sur la division qui sera mené au CE1 et au CE2 et de favoriser une meilleure compréhension de la numération décimale. Précisons chacun de ces objectifs.

Les principaux choix pédagogiques concernant la multiplication au CP

En premier lieu, nous avons choisi de ne pas introduire le signe « x » au CP, il ne le sera qu'au CE1. Ce choix se fonde sur les travaux qui, tels ceux de Schliemann et ses collègues[4] (*cf.* chapitre 1), ont mis en évidence la difficulté des enfants à comprendre la commutativité de la multiplication (*a* fois *b* est égal à *b* fois *a*). La première rencontre avec une opération arithmétique est un événement important dans la vie d'un écolier et,

4 Schliemann, A. D., Araujo, C., Cassundé, M. A., Macedo, S. & Nicéas, L. (1998). *Op. cit.*

du point de vue de l’élève, cette première rencontre n’a réellement lieu que lorsqu’on met le signe arithmétique correspondant à sa disposition. Quand on organise cette première rencontre avec la multiplication, c’est-à-dire quand on introduit le signe « x », autour de la propriété de commutativité, les enfants comprennent bien pourquoi les hommes ont inventé cette opération arithmétique : plutôt que de calculer 50 fois 3 sous la forme 3 + 3 + 3 + 3…, on peut calculer 50 + 50 + 50 ! Et chacune de ces additions répétées peut être remplacée par l’écriture 50 x 3 ou 3 x 50. Le signe « x » est le symbole du fait qu’il y a le même nombre d’objets dans *a* groupes de *b* objets que dans *b* groupes de *a* objets.

L’école a toujours intérêt à mettre en scène les ruptures entre ce que les élèves y apprennent et le savoir quotidien qui serait le leur même s’ils ne fréquentaient pas l’école.

Rappelons enfin ces deux autres choix pédagogiques :
– l’usage de tableaux comme celui qui figure page de gauche et qui invite les élèves à raisonner sur des groupes de points comme s’il s’agissait de bouquets de fleurs, de paquets de gâteaux... ;
– l’usage du mot *fois* pour décrire l’action d’ajouts répétés d’un même nombre.
Ces choix permettent d’enseigner des connaissances générales sans pour autant introduire le symbolisme arithmétique de façon trop précoce.
NB : l’usage du mot *fois* est commenté dans le chapitre 1 ; celui du mot *groupe* plus loin dans ce chapitre.

Le groupement par 2, 5 et 10 pour mieux comprendre la numération décimale

Certains élèves ont des difficultés à traiter les problèmes concernant les groupes de 2, par exemple. En effet, résoudre ces tâches nécessite de considérer la paire comme l'unité (c'est 1 groupe). L'élève se retrouve donc à gérer deux dénombrements :
– celui des groupes : il y a 4 groupes de 2, par exemple ;
– celui des « unités simples » : en tout, il y en a 8.
Pour réussir, l'élève doit coordonner ces deux dénombrements différents ! La tâche peut être complexe pour des élèves de cet âge, même avec des petits nombres.

On pourrait donc penser à différer ce type de tâche au CE1, par exemple. Mais les nombres jusqu'à 100 sont au programme. Or, pour comprendre un nombre comme 40, il faut également coordonner deux dénombrements : celui des 4 groupes de dix et celui des quarante « unités simples ». La situation est en tout point similaire à la précédente, sauf que le groupe de dix a remplacé la paire. Pour comprendre 47, il faut de plus gérer l'ajout mental de 7 unités « isolées » (parce que non groupées par 10) !
Il n'est pas raisonnable de penser qu'il serait plus facile de gérer les groupes de 10 que les groupes de 2 ou 5. En revanche, il est tout à fait raisonnable de penser qu'un travail sur les groupes de 2 et 5 aide à comprendre le groupement par 10, c'est-à-dire… la numération décimale.

5 Au CE1, la découverte de la commutativité de la multiplication aidera grandement à cette mémorisation !

Pourquoi l’usage du mot « groupe » ?

Tous les pédagogues savent que le mot « dizaine » est mal compris des élèves de CP. Certains proposent d’utiliser la locution « paquet de 10 » à la place de « dizaine». Nous lui avons préféré « groupe de 10 » parce que le mot « groupe » a un sens plus abstrait. Explicitons ceci.

Le mot « groupe » a une double caractéristique : il est non seulement plus facile à comprendre que le mot dizaine (mais le mot « paquet » a la même propriété !), mais, de plus, la locution « groupe de 10 » renvoie comme cas particuliers aux « boîtes de 10 », aux « équipes de 10 », aux « bouquets de 10 », aux « sachets de 10 » et même aux… « paquets de 10 ». Les paquets, boîtes, équipes, etc. sont en effet des cas particuliers de groupements.

C’est important parce que tout ce que les élèves apprendront relativement aux groupes de 10, ils le généraliseront à ces autres façons de grouper les unités par 10. L’usage du mot « groupe » favorise mieux la généralisation que celui du mot « paquet », qui ne se situe pas à un niveau de généralité assez élevé. Fondamentalement, ce phénomène résulte du fait que le mot « groupe » renvoie à la fois à une action (« *Groupe ces objets par 10.* ») et au résultat de cette action. Comme l’action de grouper peut tout aussi bien correspondre au remplissage de boîtes, à la formation d’équipes ou de paquets, etc., chacune de ces entités apparaît comme un groupe particulier et héritera des propriétés qui auront été explicitées concernant les groupes.

Cet usage du mot « groupe » est une nouveauté de cette édition. Par rapport à la version antérieure de *J’apprends les maths CP*, le progrès est double :

1) En appelant la boîte de Tchou un « groupe de 10 », on aide les élèves à comprendre que sa boîte est l’équivalent d’un paquet de bonbons quand ceux-ci sont conditionnés par 10, d’une équipe de 10 joueurs, d’un trait de 10 cm… : dans tous ces cas, on peut parler de « groupe de 10 ». On aide dans le même temps les élèves à généraliser à ces autres contextes les propriétés qu’ils découvrent avec Tchou (42, par exemple, c’est 4 groupes de 10 et encore 2).

2) Comme les élèves utiliseront au CE1 et au CE2 le même mot « groupe » pour comprendre la numération, d’une part, et la multiplication et la division, de l’autre, les connaissances acquises dans l’un de ces domaines sont plus facilement réinvesties dans l’autre. Les tâches qui relèvent de l’un et l’autre domaines s’en trouvent donc facilitées. C’est le cas par exemple de la tâche correspondant à la question : « Combien y a-t-il de groupes de 10 dans 130 ? ». Cette question se reformulera plus tard sous la forme « Combien y a-t-il de dizaines dans 130 ? », et il est évidemment intéressant que l’élève coordonne ses connaissances en numération décimale et celles relatives à la multiplication par dix : « 130 = 13 x 10 ». Il est important de remarquer que cela n’interdit nulle-

ment l'usage des mots « dizaine » et « fois » : il s'agit seulement de permettre aux élèves de s'approprier progressivement le sens de ces mots en utilisant un mot du langage quotidien dont le sens s'approche de celui de chacun d'eux.

En résumé, l'usage du mot « groupe » favorise mieux le progrès que celui des mots « dizaine » ou « paquet », d'une part, parce qu'il se situe à un niveau de généralité optimum, et, d'autre part, parce que son usage est possible pour aborder divers aspects de la connaissance arithmétique (numération, multiplication, etc.), ce qui favorise les liens entre ces divers aspects.

La numération et l'addition des nombres à 2 chiffres

Enseigner le calcul mental d'une telle addition avant d'enseigner la technique en colonnes

Avant d'enseigner l'addition en colonnes de deux nombres à deux chiffres en fin d'année (pages 144-145 folios élève), nous avons fait le choix d'enseigner le calcul mental de telles additions. En effet, à force d'entraînement, il serait possible d'amener certains élèves à savoir calculer 35 + 23 en colonnes alors qu'ils n'ont pas encore compris la numération décimale, c'est-à-dire que le chiffre « 3 » de 35 n'a pas la même valeur que le chiffre « 3 » de 23. Ces élèves obtiendraient le résultat indépendamment des quantités en jeu dans le calcul : certains n'apprendraient jamais à se représenter ces quantités.

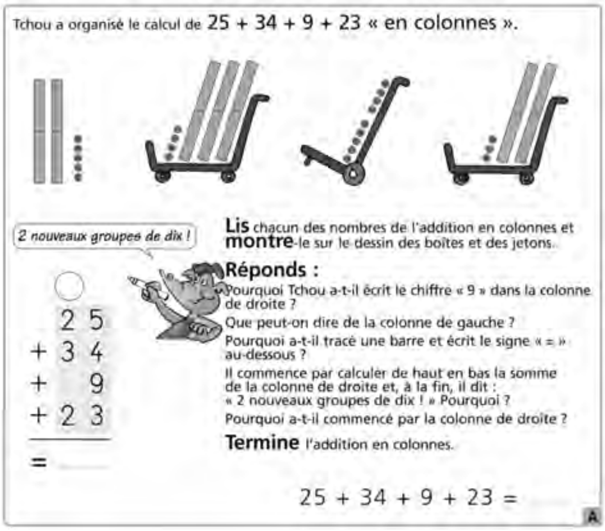
Le calcul mental de 32 + 23, lui, conduit à calculer d'abord « trente + vingt » ou « trente-deux + vingt » (il est naturel de commencer par ce qui influence le plus le résultat, c'est-à-dire les groupes de dix). Les compétences en calcul mental se développent nécessairement en liaison avec les compétences en numération décimale. C'est une des raisons qui expliquent que de bonnes compétences en calcul mental constituent le passeport pour une scolarité réussie en mathématiques.

Dans un premier temps (4^{e} période, bleue dans le fichier), les élèves trouvent le résultat des additions en dessinant les représentations analogiques et organisées en groupes de 10 que sont les nombres « comme Perrine » ou les nombres « comme Tchou », et en formant les éventuels nouveaux groupes de 10 avec les points qu'ils ont dessinés. Dans la période suivante (violette), ils raisonnent directement sur les écritures chiffrées et n'utilisent les points que pour vérifier.

Concernant les unités, on remarquera que les nombres « comme Perrine » ne favorisent pas les mêmes stratégies que ceux « comme Tchou » du fait qu'ils ne mettent pas en évidence le repère 5.

Et la technique en colonnes ?

Le fac-similé de la leçon d'introduction de cette technique se trouve ci-contre. Un premier choix qui peut étonner est celui de présenter cette technique dans le cas de la somme de 4 nombres. En fait, si l'addition



avait concerné 2 nombres à 2 chiffres seulement, de nombreux élèves n'auraient pas compris l'intérêt d'une telle disposition alors qu'ils sont capables de trouver le résultat mentalement.

Mais la raison précédente n'est pas la seule. Concrètement, au moment où le pédagogue français enseigne l'addition en colonnes, certains enfants ont déjà de bonnes connaissances en numération, et on n'est pas inquiet pour ces enfants-là. Mais on fournit aux autres une technique écrite où la disposition spatiale supplée leur méconnaissance de la numération : ils ont « tout bon », sans savoir ce que représentent les divers chiffres qu'ils utilisent (nous invitons le lecteur à relire la définition du « piège pédagogique » qui a été donnée au chapitre 2). Le phénomène de la retenue est susceptible de leur rappeler que les chiffres ont des valeurs différentes suivant leur place, mais les enfants ont tellement envie de savoir faire une addition que, très souvent, ils s'approprient ce phénomène comme un pur mécanisme.

Or l'enseignement précoce de l'addition en colonnes au CP n'est pas une fatalité : au Royaume-Uni, en Allemagne et aux Pays-Bas, cette technique n'est pas enseignée avant le CE2. En France, l'addition en colonnes est au programme du cycle 2, et, traditionnellement, les maîtres en situent l'apprentissage au CP. Nous avons dû proposer une leçon sur le sujet dans le fichier. Mais la présentation que nous avons adoptée est très directe. Nous n'avons pas mis en place un entraînement progressif à cette technique. Seuls les élèves qui ont de bonnes connaissances en numération profiteront immédiatement de cette leçon. Pour les autres, nous ne recommandons pas d'insister sur l'apprentissage de cette technique. Il nous semble préférable de le différer à l'année suivante. Au début du CE1, en effet, ces élèves profiteront non seulement de nouvelles leçons de numération, mais ils continueront aussi à progresser dans le calcul mental des sommes en explicitant les quantités en jeu. Ils continueront à apprendre la numération en calculant. La construction de 10 comme « grande unité » de compte est d'une telle importance qu'il faut laisser à ces enfants le temps qui leur est nécessaire pour l'apprendre.

Chapitre 6

GÉOMÉTRIE ET MESURE

Plan du chapitre

De l'espace vécu à l'espace représenté
– « Micro-espace, méso-espace et macro-espace »
– Comment penser le progrès des enfants ?
– Les choix de *J'apprends les maths*

Une nouvelle approche de la mesure des longueurs
– Quelques généralités sur la mesure
– Mesurer les longueurs en cm et, dans le même temps… en allumettes

De l'espace vécu à l'espace représenté

Tout au long des cycles 2 et 3, nous croyons qu'un enjeu essentiel des activités sur l'espace est d'amener l'enfant à s'y situer et à s'y représenter. À terme en effet, il s'agit pour lui de **se comprendre dans l'espace**, et l'école a un rôle essentiel pour favoriser ce processus de « décentration ».

Cependant cette expression peut renvoyer à des objectifs très différents. En effet, s'il s'agit seulement, pour l'enfant, de se déplacer dans l'espace physique où il vit en utilisant des repères perceptifs et moteurs, cette compétence est très précoce et il est douteux qu'elle s'apprenne de façon explicite : lorsque l'adulte annonce aux enfants de cours préparatoire qu'ils vont aller dans la salle de cantine ou dans un lieu extérieur à l'école qui leur est familier comme la piscine, ils sont capables de retrouver aisément le chemin pour s'y rendre. Souvent, une seule expérience du trajet suffit pour qu'ils n'aient plus vraiment besoin d'un adulte pour les guider dans leur déplacement.

En revanche, si l'enseignant demande à ces mêmes enfants de raconter ce qu'il faut faire pour aller à la salle de cantine, ils se trouvent alors face à une tâche bien plus difficile : il leur faut se donner des images mentales, des repères qu'ils rencontrent, et mettre ce parcours « en récit » selon l'ordre du déplacement, en utilisant les mots qui permettent de décrire, par exemple, des changements de direction, toutes choses qu'ils n'avaient pas besoin de faire pour effectuer le trajet. Si l'enseignant leur demande de surcroît de montrer, sur le plan de l'école, le parcours pour aller à la salle de cantine, beaucoup d'enfants ne comprennent pas ce qui leur est demandé car ils ne perçoivent pas ce plan comme une représentation de leur milieu. La compréhension des représentations en deux dimensions (**2D**) n'est en effet guère naturelle (elle est apparue relativement tard dans l'histoire). L'enfant ne peut pas la produire spontanément : c'est là une **représentation savante de l'espace**[1].

Aller à la salle de cantine, dire comment on y va, ou représenter ce parcours sur un plan sont des tâches de difficultés très différentes. « Se situer et se repérer dans l'espace » n'est donc pas si simple s'il ne s'agit plus seulement de le faire dans l'action, mais par la verbalisation ou sur des représentations 2D.

Mais nous n'avons jusqu'ici envisagé que le cas où l'enfant doit se repérer dans un espace dont il a une expérience directe puisqu'il s'agit de son cadre de vie immédiat. Or, si l'on veut que l'enfant se repère aussi dans des espaces plus étendus (son quartier ou son village, sa ville ou sa région), la difficulté devient alors bien plus grande. Elle est à son maximum quand l'enfant doit se situer et se repérer dans des espaces dont il n'a aucune expérience directe, comme son pays, la Terre, etc. En effet, il doit opérer à ce moment sur des représentations 2D de l'espace en les considérant comme substituts d'une réalité dont il n'a et ne pourra jamais vraiment avoir d'expérience préalable. Et pourtant, sans de telles représentations 2D, l'espace de l'enfant resterait limité au seul espace vécu. En somme, l'enfant est amené à se comprendre dans un espace dont il ne peut avoir qu'une expérience indirecte, reposant sur l'usage de représentations sociales. Se comprendre dans l'espace, c'est finalement, pour lui, accéder à des représentations culturelles. En un sens, l'espace est « représenté » ou il n'est pas.

Comment penser ce passage de l'espace vécu aux représentations 2D ? Voilà, nous semble-t-il, un enjeu important de la « didactique de l'espace ». Une façon d'avancer dans ce problème est d'analyser les expériences que l'enfant a dans l'espace « vécu ».

« Micro-espace, méso-espace et macro-espace »

Une première constatation s'impose : l'enfant n'a pas du tout les mêmes expériences perceptives et motrices suivant les dimensions de l'espace dans lequel il agit.

Dans « le tout petit espace » d'une feuille de papier par exemple, il dispose d'une vue globale et « unifiante » qui lui permet de considérer simultanément le tout et ses parties. Dès lors, il peut agir (par exemple colorier, dessiner, écrire…) en tenant compte de la structure d'ensemble. Il peut ainsi relier deux points éloignés tout en contournant des objets-obstacles ou apprendre à se déplacer dans un labyrinthe en anticipant les impasses et en testant des hypothèses sur des portions de parcours, etc. Dans ce micro-espace, l'enfant peut apprendre à coordonner des points de vue successifs et locaux avec un point de vue global et simultané.

Par contre, dans un espace bien plus grand, comme l'école ou le quartier, chaque endroit est nécessairement perçu de façon isolée. De chacun, l'enfant forme

1. Si l'enseignant demande de représenter le plan de la classe, les enfants restent au mieux dans une représentation « mixte » (la plupart des objets sont dessinés « de face », bien que leurs positions relatives soient organisées selon leur répartition dans le plan horizontal).

une sorte de tableau, plus ou moins riche de détails, agencés d'après le point de vue de la perception ordinaire, c'est-à-dire de face. En outre, quand ces divers tableaux sont liés entre eux, ils le sont sous forme de « séquences » qui se suivent dans l'ordre des parcours réellement effectués. Ces divers endroits sont perçus et mémorisés en s'enchaînant de manière séquentielle.

Du coup, des anticipations du même ordre que dans le labyrinthe du « tout petit espace » ne sont plus possibles. Par exemple, si un trajet donné n'a été parcouru que dans un sens, il est fréquent que l'enfant ne sache pas le parcourir dans le sens inverse. Par exemple encore, il est extrêmement difficile à un jeune enfant de prévoir que s'il tourne successivement quatre fois à droite dans un quartier où les rues se croisent à la manière d'un quadrillage, il se retrouvera à son point de départ. Pour prévoir ce phénomène, il devrait construire une carte mentale de ce quartier, c'est-à-dire adopter un point de vue virtuel sur cet espace, celui d'un observateur situé « en l'air » et qui se donne une vue schématique du pâté de maisons (en le ramenant à un quadrilatère) ou du quartier (en le pensant comme un quadrillage). Faute de ce type de reconstruction mentale dans ce méso-espace[2], l'enfant n'a que des expériences perceptives et motrices locales et successives. Il ne dispose pas d'un point de vue unifiant qui lui permettrait de les coordonner dans une représentation du tout.

Enfin, s'agissant d'espaces bien plus grands encore, l'enfant n'en a aucune expérience perceptive et motrice. Ou bien, s'il s'y déplace vraiment, faute d'une représentation adéquate de l'inclusion des espaces il ne peut relier l'expérience de ce macro-espace à celui de son cadre de vie. Il y a ainsi tout un monde entre un trajet vers Paris, perçu par l'enfant qui voyage en train, et ce même trajet représenté sur la carte de la France, beaucoup plus qu'entre le schéma d'un objet et l'objet lui-même. Quand l'adulte montre un point sur la carte de la météo de la télé et dit : « Mamie est là, elle aura beau temps demain », le jeune enfant, qui pourtant va fréquemment chez sa grand-mère en vacances, reste perplexe. Tant qu'il n'a pas compris cette carte comme une représentation miniaturisée et schématisée de la réalité, il n'y a pas de raison pour qu'il accepte de situer sa grand-mère en un point de l'écran de télévision où elle n'apparaît pas. L'enfant ne peut accéder au macro-espace qu'à mesure qu'il s'en approprie les représentations culturelles.

Comment penser le progrès des enfants ?

Des analyses qui viennent d'être faites, on peut tirer de premières conclusions pédagogiques. Le progrès des enfants semble lié à deux types d'acquisitions et à leur articulation :

1. Les apprentissages dans le micro-espace amènent progressivement l'enfant à faire toutes sortes d'anticipations sur les objets et les structures qui y sont représentés. Parce que sa perception de ces objets lui en donne une vue « dominante », il peut adopter sur eux des points de vue variés.

Les activités géométriques (au sens traditionnel) visent à développer ce type de « compétence spatiale ». Grâce aux actions que l'enfant peut entreprendre dans cet espace (relier des points, prolonger des droites, tracer des parallèles, analyser les figures selon leurs composants – portions, points, segments, angles… –, comparer des longueurs, des aires ou des angles, reproduire par translation ou compléter par symétrie, chercher un axe de symétrie, repérer les homothéties, etc.), il construit des connaissances de plus en plus riches. Celles-ci s'appuient sur l'emploi de plus en plus savant d'un vocabulaire spécifique et la maîtrise progressive des techniques de tracé. Il se libère peu à peu de l'orientation anthropomorphique de la feuille et des figures. Il est capable de réaliser et d'imaginer mentalement des rotations ou des transformations, d'adopter, sur les figures ou les solides, des points de vue différents et même des points de vue virtuels… Bref, il développe ainsi ses possibilités d'anticiper les effets de ses actions dans le micro-espace.

2. L'apprentissage des représentations 2D va permettre à l'enfant de traiter le méso-espace et le macro-espace comme s'il s'agissait d'un micro-espace et d'opérer sur ces miniaturisations à l'aide d'une perception « dominante ». Le micro-espace devient ainsi un modèle pour tous les espaces possibles.

Il est évident que si l'enfant peut traiter ainsi le méso-espace et le macro-espace en projetant sur eux les connaissances acquises dans le micro-espace, c'est qu'il a effectivement conçu l'analogie entre ces représentations 2D et la réalité qu'elles représentent. Faute de cela, elles ne peuvent être considérées comme des substituts mentaux de la réalité ; elles restent des formes sans signification.

C'est ce qui se passe si l'on demande à un enfant de relier deux points sur une carte sans qu'il ait une idée approximative de la distance réelle qu'il symbolise ainsi. En revanche, l'adulte qui utilise une représentation 2D est capable de coordonner des points de vue différents sur cet espace : les points de vue séquentiels et successifs de son expérience perceptive et motrice et le point de vue global et simultané de la représentation 2D. Par exemple, lorsqu'il décrit un parcours sur le plan d'une ville ou lorsqu'il trace le plan de ce parcours, chaque repère est simultanément représenté dans l'espace 2D et perçu mentalement selon le point de vue horizontal qui est celui du déplacement dans l'espace réel. L'adulte dit par exemple : « Tu laisses la mairie sur ta gauche et tu continues tout droit. » Or, au même instant, il dessine un rectangle (représentant la mairie) le long d'une ligne, comme s'il voyait l'endroit depuis un hélicoptère, mais dans son esprit la mairie lui apparaît – grossièrement – telle qu'il la voit effectivement lorsqu'il passe devant et la « laisse » sur

2. Nous empruntons ces termes à un didacticien des mathématiques, G. Brousseau (*cf.* Brousseau, 1983), mais en leur donnant une signification différente : notre « méso-espace » réunit deux types d'espaces qui, dans son approche, sont distingués. La distinction que Brousseau avance est pertinente, mais si nous l'avions retenue, nous aurions dû parler d'un « méso-espace 1 » et d'un « méso-espace 2 » et cela aurait inutilement compliqué l'exposé.

sa gauche, avec son escalier monumental, ses murs de pierre taillée, ses géraniums aux balcons…

Ce n'est donc que si l'enfant est capable de coordonner ainsi les différents points de vue qu'il peut utiliser le micro-espace d'une représentation 2D comme substitut mental et comme modèle d'un espace bien plus grand. Il est donc décisif de l'amener à se repérer fréquemment sur des supports de représentation de son méso-espace, où il devra coordonner des points de vue différents : les plans de sa salle de classe, de son village ou de sa ville, de sa région, d'une manière générale de tous les espaces dont il a une expérience directe. Ils constituent des supports essentiels à la compréhension des représentations 2D dans leur ensemble. À terme, la réussite dans des parcours d'orientation avec carte et boussole témoigne que l'enfant est devenu capable de relier le point de vue vertical sur les déplacements sur la carte avec celui du déplacement horizontal dans la réalité.

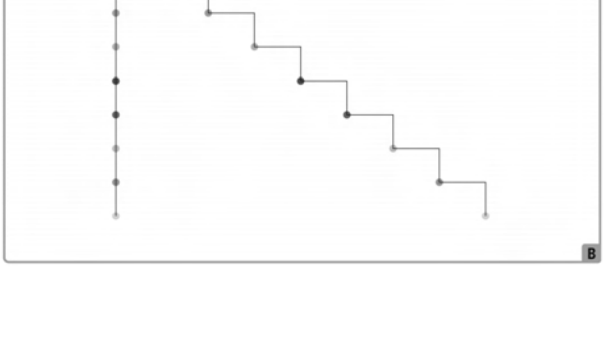
Quant au macro-espace, celui-ci ne peut se construire que par analogie avec le méso-espace. La carte de la France, le planisphère… représentent des espaces de dimensions fort différentes et dont on ne peut avoir que des expériences nécessairement partielles.

Les choix de *J'apprends les maths*

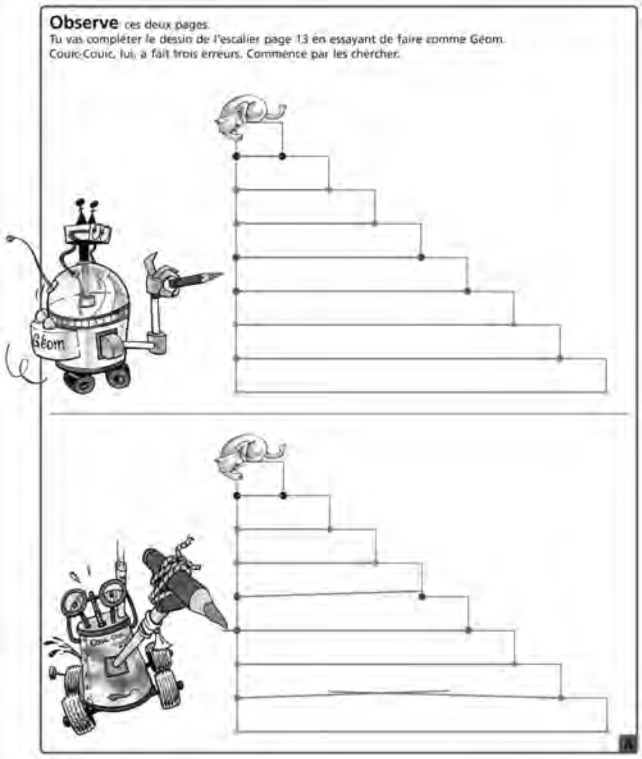
Dans *J'apprends les Maths CP*, l'enseignant trouvera donc deux grands types d'activités :
– Des activités dont l'objectif est le **développement d'habiletés dans le micro-espace de la feuille de papier :** divers tracés géométriques (tracés à la règle et sur quadrillage, d'une part, tracés avec des formes géométriques prédécoupées, les « formographes », d'autre part), repérage de positions de manière absolue (en haut à droite dans la feuille, dans la case B4, etc.) ou relative (à droite de tel personnage, par ex.).
– Des activités portant sur **le passage de l'espace 3D à l'espace 2D.**

Au-delà du contenu, un grand nombre de séances de géométrie ont une forme commune qu'il convient de présenter. Les élèves sont souvent amenés à analyser la façon dont deux personnages, Géom et Couic-Couic, ont réalisé la tâche qui va leur être proposée.

Considérons, par exemple, la séquence de la page 13, où les élèves doivent tracer à la règle les traits horizontaux qui permettent de compléter cet escalier :



Ils sont auparavant amenés à analyser la réalisation de cette tâche par Géom et Couic-Couic :



En fait, les réalisations de Géom sont toujours correctes tandis que celles de Couic-Couic comportent toujours **3 erreurs**. Lors de la découverte de l'activité, le travail de Géom permet ainsi aux élèves de découvrir ce vers quoi ils devront tendre : le personnage de Géom délivre aux élèves le but de la tâche. En début de séance, on procède à l'analyse collective des erreurs de Couic-Couic : dans l'exemple précédent, il a mal joint deux des points (4e marche en partant du haut), il a tracé un trait « qui dépasse à gauche » (5e marche en partant du haut) et, enfin, il a tracé une marche en tentant de raccorder deux traits (avant-dernière marche). Le personnage de Couic-Couic permet ainsi aux élèves de prendre conscience des contraintes de la tâche : les traits doivent *joindre* les points *sans les dépasser* et ils doivent résulter d'*un seul tracé* de crayon.

Ce procédé pédagogique a pour objectif d'amener les élèves à anticiper les actions qui leur permettront de réussir les tâches qui leur sont proposées. En effet, il est toujours plus facile à un jeune enfant de comprendre « ce qu'il faut faire » en le comparant à « ce qu'il ne faut pas faire ». Lorsqu'on présente seulement une exécution correcte, les contraintes qu'il faut gérer pour accéder à la réussite restent implicites. En comparant en grand groupe, avec l'aide de l'adulte, le travail de Géom et celui de Couic-Couic, les enfants verbalisent les différentes contraintes de la tâche. Du coup, au cours de l'activité elle-même, ils régulent leur action différemment : on les voit plus souvent commenter leur travail, gommer, reprendre, etc.

Présentation

Une nouvelle approche de la mesure des longueurs

Quelques généralités sur la mesure

Rappelons d'abord quelques généralités concernant la mesure des grandeurs. Trois sortes d'entités doivent en effet être distinguées :

– **Les supports des grandeurs :** on parlera, par exemple, de la *longueur* d'un segment de droite ou d'une ligne brisée, mais de l'*aire* d'un triangle ou d'un rectangle. Plus généralement, on ne peut parler d'un type de grandeur donné que relativement à un certain type de support : on parle de longueurs concernant des segments de lignes droites ou courbes, on parle d'aires concernant des surfaces délimitées (qu'elles soient planes ou courbes), on parle de volumes concernant des solides, etc.

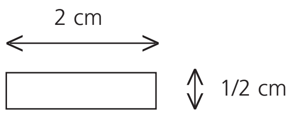
– **Les grandeurs elles-mêmes** (les longueurs, les aires, les volumes par exemple) ne doivent évidemment pas être confondues avec l'un des supports qui les réalisent : une même longueur correspond à des segments de lignes dont certaines sont droites, d'autres sont brisées et d'autres courbes, une même aire peut être celle d'un triangle ou d'un rectangle, etc.

– Enfin, **une mesure** d'une longueur donnée (d'une aire donnée, etc.) est **un nombre** qui exprime le rapport de cette longueur (de cette aire, etc.) à une autre longueur (à une autre aire, etc.) qu'on appelle *unité*.

À une même longueur (respectivement une même aire) correspondent donc diverses mesures de cette longueur (de cette aire) selon l'unité qui est choisie.

Un mot manque dans ce glossaire : celui d'*étalon*. L'étalon est à l'unité ce que le « mètre-étalon » construit en platine et « déposé au pavillon de Breteuil » est au mètre : l'étalon est une réalisation (une matérialisation) de l'unité. L'unité est une grandeur (le cm, par exemple, est une longueur), mais dans un étalon d'1 cm, cette grandeur est attachée à un support : une bande de 1 cm de long, par exemple.

Le passage d'une unité à un étalon qui réalise cette unité peut réserver des surprises : un rectangle de largeur 1/2 cm et de longueur 2 cm, par exemple, est un étalon du cm^2.



1 cm^2

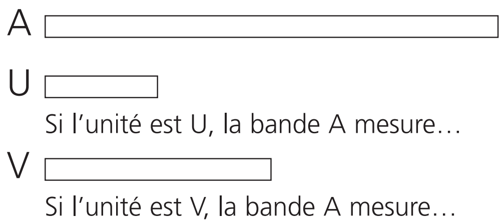
Les enfants de CM sont souvent surpris en présence « d'un centimètre carré qui n'est pas carré », mais on aura compris que c'est l'étalon qui n'est pas carré car le cm^2, qui est une aire, n'a aucune forme qui lui soit attachée. De même, si le mètre-étalon du pavillon de Breteuil est droit, c'est uniquement pour des considérations pratiques !

Mesurer les longueurs en cm et, dans le même temps… en allumettes

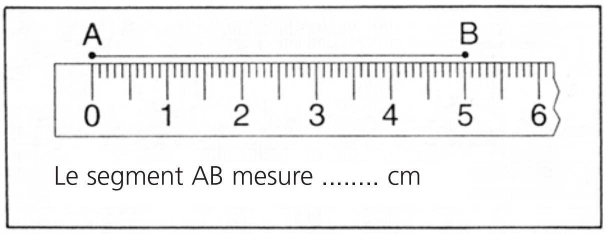
La notion d'étalon est importante pour comprendre la didactique de la mesure à l'école primaire. En effet, l'activité qui, classiquement, sert à introduire la mesure des longueurs est la suivante : on a choisi un étalon de longueur et on arpente divers segments à l'aide de cet étalon. La mesure obtenue s'exprime alors soit par un *nombre entier*, soit par un *encadrement entre deux entiers successifs*.

Ce procédé d'arpentage est fondamental car c'est lui qui permet de donner aux enfants l'intuition de ce qu'est une mesure : ce segment est long comme 3 allumettes, par exemple. Il est par ailleurs adapté aux jeunes enfants parce qu'il conduit à un encadrement par des mesures entières alors que la mesure est un rapport qui, généralement, ne peut pas s'exprimer par un nombre entier (la diagonale du carré dont le côté mesure 1 a pour mesure $\sqrt{2}$).

Examinons la progression qui est le plus souvent adoptée aujourd'hui. On propose successivement aux enfants les deux sortes d'activités suivantes :



Puis :



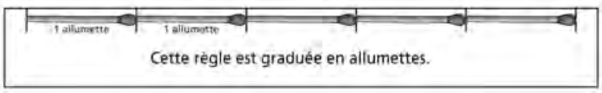
Il n'y a pratiquement pas de transition entre une activité et l'autre : l'enfant procède d'abord à des arpentages avec des unités quelconques, et lorsqu'il rencontre une unité conventionnelle de longueur, c'est directement avec la règle graduée en cm, c'est-à-dire sous une forme très élaborée où l'arpentage qui a permis la mesure n'est pas facile à reconstituer mentalement.

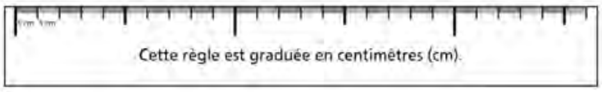
Cette progression présente un double inconvénient :
– lorsqu'ils arpentent avec une unité quelconque, beaucoup d'enfants n'ont pas conscience qu'ils mesurent parce qu'ils ont déjà une connaissance sociale du phénomène de la mesure et que pour eux, mesurer, ça se fait « avec la règle et avec des cm » ;

– lorsqu'ils mesurent avec la règle graduée, ils ne font aucun lien entre cet outil et le résultat d'un arpentage à l'aide d'un étalon d'1 cm.

Du coup, lorsqu'on demande aux enfants de « montrer 1 cm sur la règle », ils montrent le plus souvent l'intervalle entre 0 et 1, mais la longueur d'un intervalle entre 2 numéros successifs n'est pas aussi facilement interprétée comme 1 cm. En fait, de nombreux enfants apprennent à se servir d'un double décimètre par répétition de la « bonne séquence d'actions » (je pose le 0 sur une extrémité du segment, je regarde à l'autre extrémité, etc.), sans réellement comprendre la structure de cet outil. De nombreuses erreurs attestent d'ailleurs de la nature de cet apprentissage : certains enfants font coïncider une extrémité du segment avec le 1 (et non le 0), d'autres avec le bord de la règle.

C'est une autre progression qui a été adoptée dans *J'apprends les maths*. On y utilise de manière conjointe l'allumette et une bande de longueur 1 cm comme *étalons de longueur*. C'est ainsi que les enfants disposent de 2 règles graduées, l'une en allumettes et l'autre en cm :





On leur propose de mesurer des longueurs d'abord en allumettes, puis en centimètres.

Ces utilisations successives de 2 étalons doivent amener les élèves à mieux se représenter ce qu'est une longueur de 1 cm. En effet, l'arpentage est explicite dans la règle graduée en allumettes (de manière évidente, on y a mis bout à bout des allumettes). Or une règle graduée en cm est construite de la même manière : on y a mis « bout à bout des cm ».

Les enfants s'approprient d'autant mieux cette structure de la règle graduée en cm qu'elle est, dans un premier temps, dépourvue de toute numérotation. Pour mesurer la longueur d'un segment, ils sont ainsi amenés à « compter les cm ». On veut par là qu'ils comprennent qu'une longueur de 6 cm est équivalente à 6 longueurs de 1 cm mises bout à bout. Lorsqu'ils utiliseront un double décimètre numéroté, il leur sera plus facile de comprendre que, depuis le trait du 0 jusqu'au trait du 6, il y a 6 longueurs de 1 cm.

Remarquons que certaines expressions qui viennent d'être employées sont incorrectes :

– Il est incorrect de dire qu'on met « bout à bout des cm », car ce sont des bandes de longueur 1 cm qui sont juxtaposées et non des cm. Cette façon de s'exprimer relève de la confusion entre « unité » et « étalon » !

– Il est incorrect de dire qu'« un segment mesure 2 allumettes », car l'allumette est un étalon ; il serait préférable de dire que « ce segment mesure 2 quand l'unité est la longueur de l'allumette ». Encore une confusion entre « unité » et « étalon » !

Mais ce n'est pas toujours en s'exprimant d'emblée de la façon la plus correcte qu'on favorise le mieux l'apprentissage. Le cas des « incorrections » précédentes nous semble même montrer que *certaines incorrections ont une grande valeur didactique.*

En effet, en choisissant deux entités dont l'une est un étalon (l'allumette) et l'autre une unité (le cm), et en acceptant le « jeu de langue » qui consiste à s'exprimer tantôt avec l'unité comme si elle était un étalon (« on met bout à bout des cm ») et tantôt avec l'étalon comme s'il était une unité (« un segment mesure 2 allumettes »), on aide l'enfant à s'appuyer sur ce qu'il connaît le mieux, l'allumette-étalon, pour concevoir l'entité la plus abstraite, *le cm-unité*.

Par ailleurs, en utilisant deux étalons de longueurs différentes, on aide les enfants à prendre conscience que pour penser une mesure, il faut penser à la fois un nombre et une unité. Ainsi, l'erreur qui consiste à répondre que « 2 allumettes c'est moins long que 8 cm », du fait que 2 < 8, est fréquente chez les débutants. Ces élèves doivent apprendre que pour comparer deux longueurs dont chacune est donnée par une mesure, la comparaison des nombres ne suffit pas car à chaque nombre est attachée une unité. De même, pour savoir quelle est la longueur exprimée par une mesure donnée (8 cm par exemple), il ne suffit pas de s'intéresser au nombre, il faut coordonner l'unité (le cm et non l'allumette) et le nombre de fois qu'elle est répétée (8).

Là encore, on remarquera l'utilisation didactique qui est faite de la différence de nature entre l'allumette (plus proche de l'étalon) et le cm (qui est une unité) : « le changement d'unité » sous-jacent à l'activité précédente (comparer 2 allumettes et 8 cm) serait très difficile s'il s'agissait de deux unités conventionnelles (le cm et le dm, par exemple) ; il est beaucoup plus simple lorsque l'une des unités (la longueur d'une allumette) correspond à un étalon familier.

L'approche didactique de la mesure des longueurs qui est exposée ici est donc nouvelle en ce sens que les activités d'arpentage avec un étalon familier ne précèdent pas l'introduction d'une unité conventionnelle. Bien au contraire, les longueurs sont **dans le même temps mesurées en cm et en allumettes**. L'interaction entre ces deux sortes de mesure est considérée ici comme un **facteur essentiel de l'apprentissage.**

Hors-texte

Un matériel pédagogique à risque : les pièces en eurocentimes

Comprendre la monnaie est un objectif à part entière du CP et cela suffirait à justifier que les élèves soient confrontés à cet objet social. Par ailleurs, vu le rôle privilégié que jouent 5 et 10 dans le système de pièces et de billets, la monnaie est aussi un excellent moyen pédagogique pour l'apprentissage du calcul. Souvent, les enfants de cet âge manipulent déjà de petites sommes d'argent et on pourrait *a priori* penser qu'il est souhaitable de leur enseigner l'usage des pièces correspondantes : les pièces en eurocentimes. Malheureusement, la décision d'écrire « cent » sur ces pièces en fait un matériel pédagogique « dangereux ».

Peut-on, dans un texte, remplacer le mot « coude » par l'abréviation « cou » ?

Rappelons certaines données fondamentales. En premier lieu, le mot « cent » réfère dans notre langue à la centaine, c'est-à-dire 100 unités. Personne ne pourra changer cet état de fait. En second lieu, le concept de centaine est très différent de celui de centième (ou de centime) : il ne faut surtout pas confondre 100 et 0,01 !

Observons une pièce de 2 eurocentimes en essayant de nous mettre à la place d'un enfant de cours préparatoire dont une des premières préoccupations est d'apprendre à lire :

Cet enfant va lire ce qui est écrit : « 2 », « euro » et « cent ». Or, s'il convient bien qu'il comprenne que cette pièce exprime une valeur en euro, il ne faut absolument pas qu'il pense que cette valeur est de deux cents euros ! Il faudrait donc que lorsque l'enfant voit l'écriture « cent » sur la pièce, il pense : « centime ». En d'autres termes, il faudrait que, pour lui, le mot « cent » fonctionne comme une abréviation de « centime ».

Or, qui peut croire qu'avec de jeunes enfants, l'écriture « cent » peut sans risque fonctionner comme abréviation de « centime », alors que dans le même champ sémantique, elle réfère déjà à « centaine » ? Tout en étant différents, la centaine et le centième (ou centime) sont deux concepts qu'on est susceptible de rencontrer dans les mêmes textes et contextes, ce qui oblige à quelques précautions quant à leur désignation.

Utiliser les pièces en eurocentimes comme matériel de classe au CP, c'est avoir une pratique pédagogique analogue à celle d'un maître qui, pour enseigner le nom des différentes parties du corps, fournirait à ses élèves le schéma ci-contre. Qui, dans un texte sur les parties du corps, songerait à remplacer le mot « coude » par l'abréviation « cou » ? Surtout si ce texte, adressé à des débutants, est censé les aider à s'approprier le concept de coude. *Quand deux concepts différents appartiennent à un même champ sémantique, utiliser le mot qui désigne l'un comme une abréviation de l'autre est une grave erreur pédagogique.*

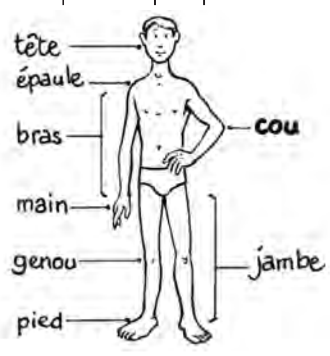
Un obstacle important à l'appropriation de la numération décimale

D'une manière plus générale, nous avons vu, dans le chapitre 4 de cette présentation, que le progrès en numération et en calcul chez les enfants de 5 à 10 ans dépend crucialement de la façon dont « on parle les nombres » dans leur langue maternelle. Pour que les élèves comprennent le double statut de dix (c'est une « grande unité de compte » formée d'unités simples), nous recommandons d'ailleurs, dans *J'apprends les maths CP*, d'utiliser le plus souvent possible le mot « dix » comme synonyme de « dizaine », de sorte que « trente-sept » soit décrit non seulement comme « 3 *dizaines* et 7 *unités* », mais aussi comme « 3 *dix* et 7 » et même comme « 3 *dix* et 7 *uns* ».

Le premier groupement que les enfants francophones rencontrent, dont ce double statut est explicite dans leur langue, c'est le « cent », parce qu'en français, on compte : « cent », « deux cents », « trois cents », etc. Alors que les enfants francophones pouvaient, jusqu'à présent, s'approprier la numération en coordonnant ces deux significations du mot *cent* (d'une part, 100 unités simples, de l'autre, l'unité qui elle-même se compte : « deux cents », « trois cents », etc.), le choix d'appeler le centième d'euro un « cent » vient, de manière particulièrement inopportune, rajouter une troisième signification (celle de *centième d'euro*, lorsqu'on le rencontre écrit sur une pièce) et, donc, singulièrement compliquer leur tâche.

En attendant que les pièces en eurocentimes soient modifiées…

Pour résoudre le problème, il suffirait de remplacer le mot « cent » par l'abréviation « c » qui, dans toutes les langues, serait celle de « centime ». En attendant que cela se fasse, il ne paraît guère prudent d'utiliser les pièces en eurocentimes qu'on nous propose aujourd'hui comme matériel pédagogique. Il convient certainement d'en différer l'usage au CE1, à un moment où les élèves ont de meilleures connaissances en numération décimale. À ce niveau de la scolarité, les élèves auront vraisemblablement déjà rencontré ces pièces dans un contexte familial. Mais cela est moins gênant parce que l'apprentissage s'y effectue de manière plus implicite : dans un tel contexte, les enfants reconnaissent les pièces plutôt à partir de leur taille et de leur couleur qu'à partir de l'écrit alphabétique qu'elles contiennent.



Rémi Brissiaud
François Lelièvre
André Ouzoulias
Florence Suire

Chaque double page de ce guide correspond à une double page du fichier de l'élève.

Ce guide pédagogique décrit, d'une part, comment animer les activités du fichier de l'élève, et contient, d'autre part, un ensemble d'activités complémentaires dont l'index figure en dernière page.

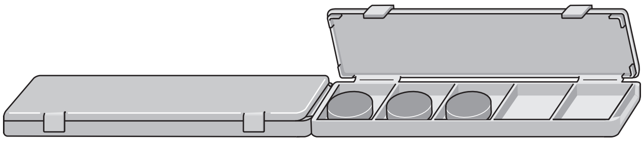
Dans chaque double page, les objectifs principaux sont rappelés et précisés dans la colonne de gauche.

Le fichier est structuré en 5 périodes qui constituent 5 phases dans la progression en arithmétique. De ce fait, ces périodes ne coïncident pas avec les «périodes» de l'année scolaire, telles qu'elles résultent des dates des congés. Le guide pédagogique reprend cette organisation.

Le fichier a été conçu de telle façon que, le plus souvent, une page corresponde à une journée (certaines séances utilisent une double page), et un groupe de quatre pages à une semaine.

Périodes	Arithmétique	Géométrie et mesure
rouge 1	**Calcul jusqu'à 5** décompositions, additions et comparaisons; le repère 5 sur les doigts	Tracés à la règle
jaune 2	**Calcul jusqu'à 10** décompositions, additions et soustractions **Les 20 premiers nombres** comprendre 14 comme 10 et 4; groupes de 2 et 5	Tracés à la règle (suite); repérage sur quadrillage
verte 3	**Calcul jusqu'à 20** additions (retour aux 5) **Numération décimale** les nombres jusqu'à 69; groupes de 2, 5 et 10	Tableaux cartésiens; tracés sur quadrillage
bleue 4	**Calcul jusqu'à 20** grands doubles, passage de la dizaine **Addition de 2 nombres à 2 chiffres** calcul en dessinant comme Perrine ou Tchou	Des représentations en 3 dimensions au plan; mesure de longueurs (début)
violette 5	**Calcul jusqu'à 20; numération** soustractions; les nombres de 69 à 100 **Addition de nombres à 2 chiffres** calcul à partir des écritures chiffrées	Figures simples; longueurs (le cm); masses (le kg)

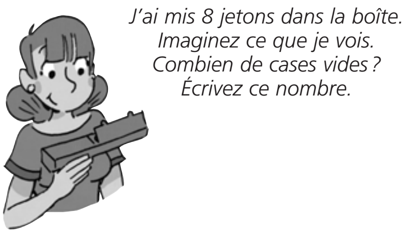
La boîte de Tchou



Matériel diffusé par Retz
en petit nombre ou en valises
de 10 boîtes de 10.

Chaque compartiment contient 5 jetons. Ces compartiments peuvent être assemblés pour former une boîte de 10 jetons. Dans ce cas, **il est préférable de les solidariser par un point de colle**.

Les boîtes de Tchou sont nécessaires pour animer les scénarios d'anticipation.

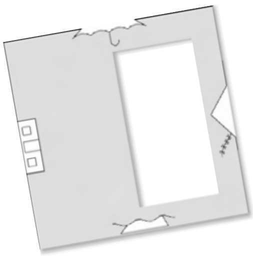


Anticipation

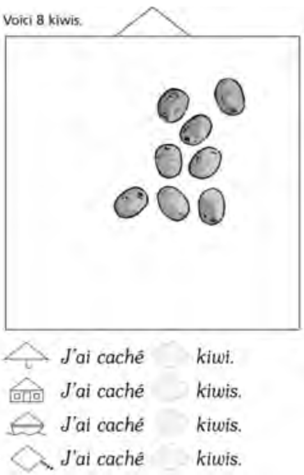
Validation

Elles servent également à mener des activités (course à 5, course à 10) en petits groupes ou en classe entière.

Les caches

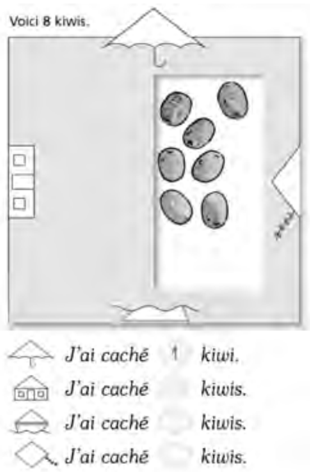


Le cache en carton permet de nombreuses situations-problèmes autocorrectives (pp. 70, 76 et 79 folios élève). Un mode d'emploi détaillé figure dans chaque fichier de l'élève (page 158).



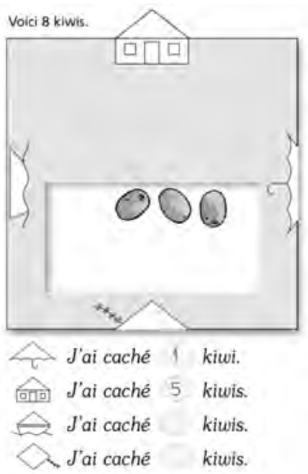
Support de l'activité sur le fichier. Les élèves vérifient qu'il y a bien le nombre de kiwis annoncé.

1



Le cache est posé dans la première position demandée. On s'interroge : *« Il y a 8 kiwis en tout, j'en vois 7, combien sont cachés ? »*

2

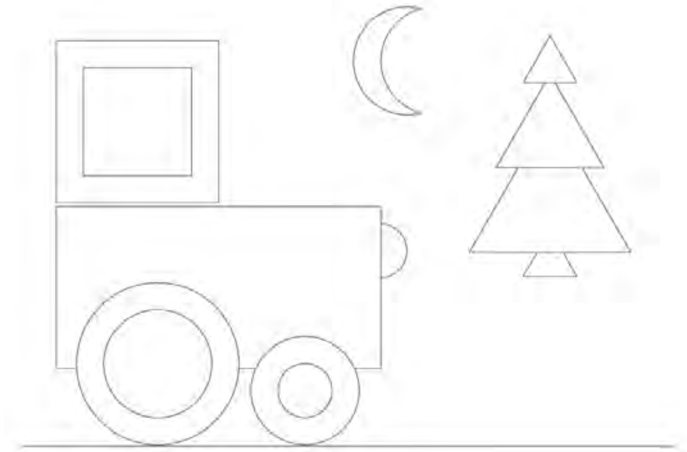


En tournant le cache d'un quart de tour, on pose un nouveau problème…

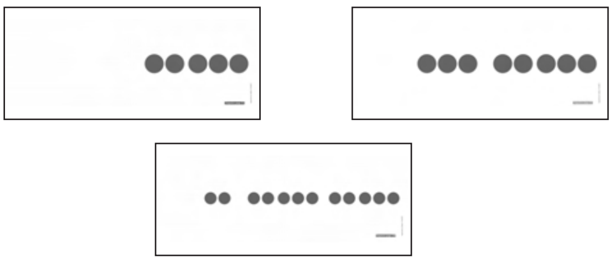
Les formographes

Deux formographes en plastique transparent utilisés pour les activités de géométrie séquences 131, 132-133, 138-139 et 148-149.

Des modèles de réalisations supplémentaires sont téléchargeables sur le site compagnon de *J'apprends les maths CP* (japprendslesmaths.fr).



Les cartons



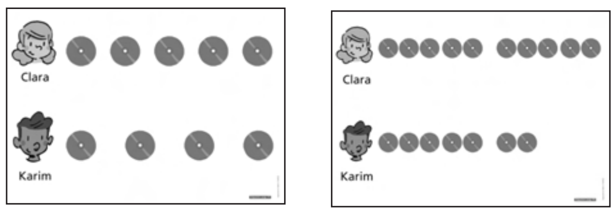
Ces cartons permettent d'animer les situations d'anticipation du résultat d'un retrait.

Exemple : 8 – 1

J'ai caché 1 point.
Imaginez ce que je vois maintenant.
8 – 1 = …

Anticipation

Validation



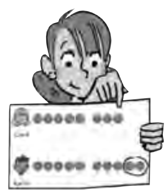
Ces cartons permettent d'animer les situations d'anticipation de comparaison de deux collections.

Exemple : 10 – 8

Clara a 8 CD,
Karim a 10 CD.
Imaginez ce que je vois.

Je vais cacher ce qui est pareil.
Écrivez la soustraction et calculez.

Anticipation

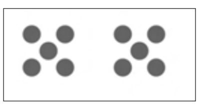


Validation

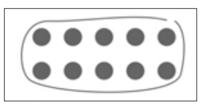
Ce matériel est aussi téléchargeable sur le site compagnon de *J'apprends les maths CP* (japprendslesmaths.fr).

D'autres cartons sont également téléchargeables sur ce site.

Les nombres « comme Dédé ».



Les nombres « comme Perrine ».



Des cartons éclairs quelconques.